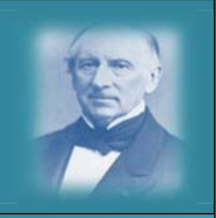
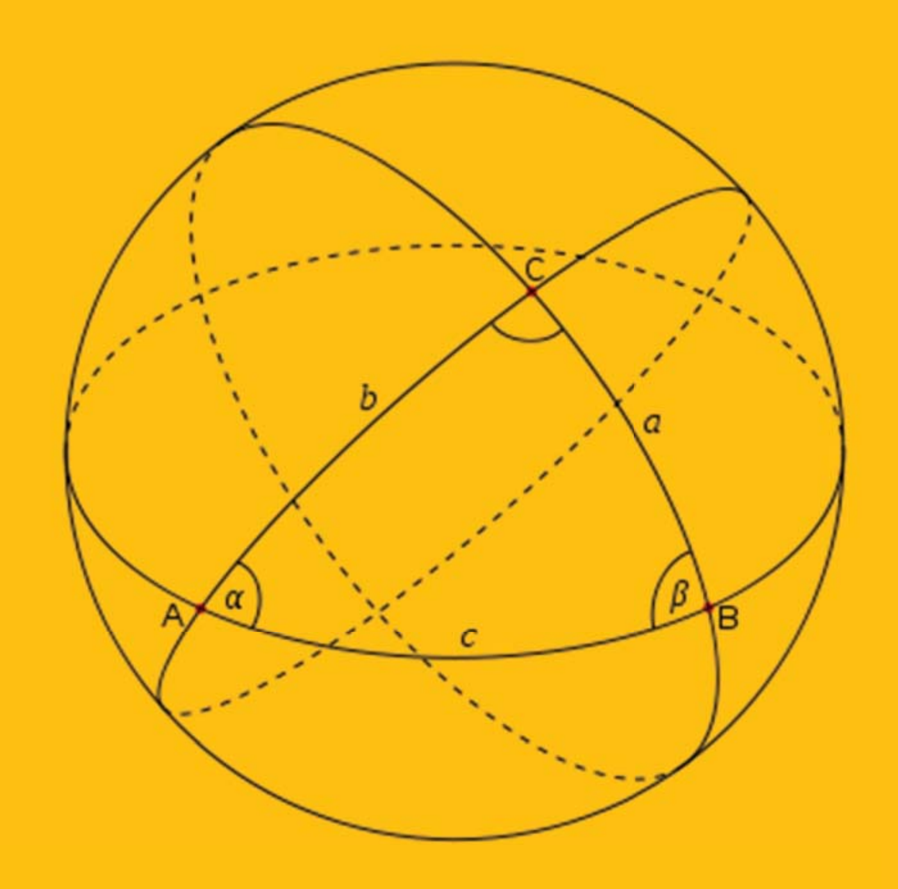


LƯỢNG GIÁC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG

TẬP 2 : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH

VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH

LƯỢNG GIÁC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG

TẬP 2 : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH,

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

TP. HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "LƯỢNG GIÁC – MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG" này được biên soạn với mục đích cung cấp, bổ sung kiến thức cho học sinh THPT và một số bạn đọc quan tâm đến mảng kiến thức này trong quá trình học tập và làm việc. Trong tập 2 "PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC" này, chúng tôi sẽ xoáy vào trọng tâm là "PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC", một dạng toán quen thuộc trong các đề thi THPT, đặc biệt là đề thi tuyển sinh Đại Học.

Ở các chương chính, chúng tôi chia làm 3 phần :

- **Phần I :** Nêu lý thuyết cùng ví dụ minh họa ngay sau đó, giúp bạn đọc hiểu và biết cách trình bày bài. Đồng thời đưa ra các dạng toán cơ bản, thường gặp trong quá trình làm bài trên lớp của học sinh THPT. Ở phần này, chúng tôi sẽ trình bày một số bài để bạn đọc có thể nắm vững hơn, tránh sai sót.
- **Phần II :** Trong quá trình tham khảo và tổng hợp tài liệu, chúng tôi sẽ đưa vào phần này các dạng toán khó nhằm giúp cho các học sinh bồi dưỡng, rèn luyện kĩ năng giải LƯỢNG GIÁC thành thạo hơn khi gặp phải những dạng toán này.
- **Phần III :** Chúng tôi sẽ đưa ra lời giải gợi ý cho một số bài, qua đó bạn đọc kiểm tra lại đáp số, lời giải hoặc cũng có thể tham khảo thêm.

Trong quá trình biên soạn, mặc dù chúng tôi đã cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu có sẵn và tiếp thu có chọn lọc ý kiến từ các bạn đồng nghiệp để dần hoàn thiện cuốn sách này, nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót bởi tầm hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Chi tiết liên hệ tại : anhkhoavo1210@gmail.com
minh.9a1.dt@gmail.com

CÁC TÁC GIẢ

VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH.

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi xin cám ơn đến những bạn đã cung cấp tài liệu tham khảo và vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc bản đánh máy, tạo điều kiện hoàn thành cuốn sách này :

- Ngô Minh Nhựt (ĐH Kinh Tế Tp.HCM)
- Mai Ngọc Thắng (ĐH Kinh Tế Tp.HCM)
- Nguyễn Thị Thanh Huyền (THPT Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai)
- Nguyễn Huy Hoàng (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Tp.HCM)
- Trần Lam Ngọc (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa Tp.HCM)
- Vương Tuấn Phong (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa Tp.HCM)
- Lê Quang Hiếu (THPT Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai)
- Hoàng Minh Quân (ĐH Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội)

và một số thành viên diễn đàn MathScope.



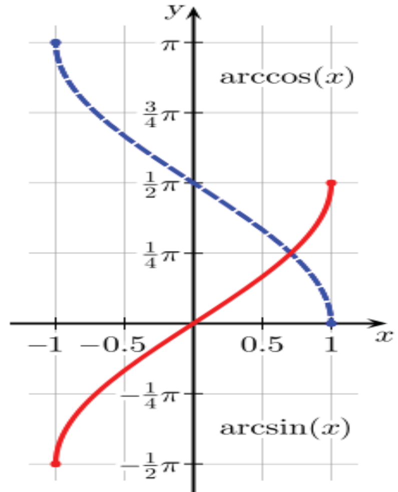
MỤC LỤC

TẬP 2 : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG 4

SƠ LƯỢC VỀ HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

I. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN VỀ HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC



- Hàm số $y = \arcsin x$ là hàm lượng giác ngược của hàm số $x = \sin y$, có một số tính chất cơ bản sau

$$\begin{cases} y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(\arcsin x) = x, x \in [-1; 1] \\ \arcsin(-x) = -\arcsin x \end{cases}$$

- Hàm số $y = \arccos x$ là hàm lượng giác ngược của hàm số $x = \cos y$, có một số tính chất cơ bản sau

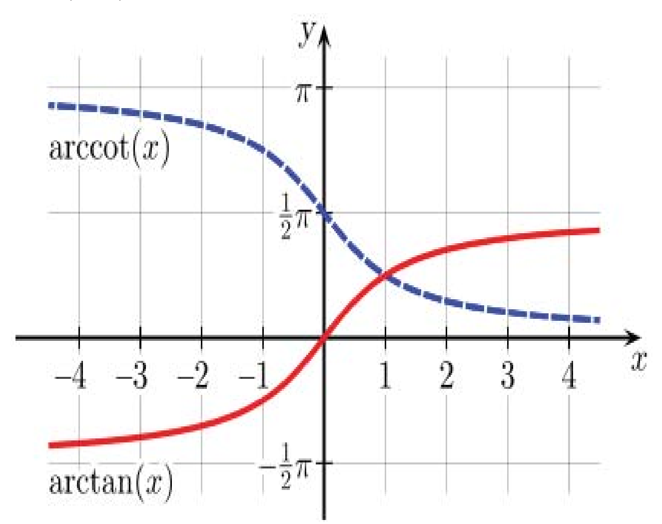
$$\begin{cases} y \in [0; \pi] \\ \arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi] \\ \cos(\arccos x) = x, x \in [-1; 1] \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x \end{cases}$$

- Hàm số $y = \arctan x$ là hàm lượng giác ngược của hàm số $x = \tan y$, có một số tính chất cơ bản sau

$$\begin{cases} y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \arctan(\tan x) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan(\arctan x) = x, x \in \mathbb{R} \\ \arctan(-x) = -\arctan x \end{cases}$$

- Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$ là hàm lượng giác ngược của hàm số $x = \cot y$, có một số tính chất cơ bản sau

$$\begin{cases} y \in (0; \pi) \\ \operatorname{arccot}(\cot x) = x, x \in (0; \pi) \\ \cot(\operatorname{arccot} x) = x, x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x \end{cases}$$



II. BÀI TẬP VÍ DỤ VỀ HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

a. $A = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

Vì $\begin{cases} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ nên $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Do đó,

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b. $B = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Do $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$. Tuy vậy

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

Do đó,

$$B = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

c. $C = \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$

Ta thấy :

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$$

Do đó,

$$C = \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \arccos\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \pi - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

CHƯƠNG 5

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

- CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

a. $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

c. $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

d. $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u \neq k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

- CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN ĐẶC BIỆT

1. $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

2. $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

3. $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

4. $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

5. $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

6. $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

7. $\sin u = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ u = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

8. $\cos u = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

9. $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ u = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

10. $\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow u = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

11. $\sin u = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ u = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

12. $\cos u = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow u = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

13. $\sin u = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ u = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

14. $\cos u = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow u = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý rằng:

1) Phương trình $\sin x = m \ (m \in [-1;1])$ có đúng một nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta kí hiệu nghiệm đó là $\arcsin m$.

2) Phương trình $\cos x = m \ (m \in [-1;1])$ có đúng một nghiệm thuộc $[0;\pi]$.

Ta kí hiệu nghiệm đó là $\arccos m$.

3) Phương trình $\tan x = m \ (m \in \mathbb{R})$ có đúng một nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta kí hiệu nghiệm đó là $\arctan m$.

4) Phương trình $\cot x = m \ (m \in \mathbb{R})$ có đúng một nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ta kí hiệu nghiệm đó là $\text{arccot}\, m$.

Chúng ta sử dụng các công thức biến đổi lượng giác đã nêu trong Chương 2, phân tích phương trình thành các nhân tử để xuất hiện các dạng phương trình trên.

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $\sin 2x = 1$

b. $\cos 3x = \frac{1}{2}$

c. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\cot 2x = 1$

Giải:

a. Ta có:

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta có:

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Ta có:

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

d. Ta có:

$$\cot 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\sin(x + 2) = \frac{1}{2}$

b. $\cos(\pi - x) = 1$

c. $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$

d. $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$

Giải:

a. Ta có:

$$\sin(x+2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x+2=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi-2\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi-2\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

b. Ta có:

$$\cos(\pi-x)=1\Leftrightarrow\pi-x=k2\pi\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

c. Ta có:

$$\tan(2x-1)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=\frac{\pi}{3}+k\pi\\2x-1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}\\x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$$

d. Ta có:

$$\cot(3x-1)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\3x-1\neq k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}+\frac{1}{3}\\x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}+\frac{1}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

b. $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

c. $\sin x=\cos(x+\pi)$

Giải:

a. Ta có:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{4}+k\pi\\2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

b. Ta có:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan(2x+\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{6}=x+\frac{\pi}{4}+k\pi \\ 2x+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

c. Ta có:

$$\sin x=\cos(x+\pi)\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-x-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+x+\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ 0x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\ (\text{vô lý}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. $\tan x+\cot x=-\dfrac{2}{\cos x}$

b. $\dfrac{\sin x}{\sin 5x}-\dfrac{\cos x}{\cos 5x}=0$

c. $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$ (Tuyển sinh khối D 2004)

Giải:

a. Điều kiện :

$$x\neq\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=-\frac{2}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin 2x\neq 0 \\ \cos 2x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \sin 4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{\sin 2x\cos 2x}=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$ ta được nghiệm là $x = \pi + m2\pi \ (m \in \mathbb{Z})$

c. Ta có:

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2\cos x - 1)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

<u>Bài 5:</u> Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{3}\tan(2x - 36^0) - 1 = 0, x \in [90^0; 180^0]$

b. $\sin(3x + 1) + \sin(3x - 1) = 0, x \in [-\pi; \pi]$

c. $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0, x \in [0; 14]$ (Tuyển sinh khối D 2002)

<u>Giải:</u>

a. Ta có:

$$\sqrt{3}\tan(2x - 36^0) - 1 = 0 \text{ (với } x \in [90^0; 180^0])$$
$$\Leftrightarrow \tan(2x - 36^0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 36^0 = 30^0 + k180^0 \\ 2x - 36^0 \neq 90^0 + k180^0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 33^0 + k90^0 \\ x \neq 63^0 + k90^0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 33^0 + k90^0 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Lại có:

$$x \in [90^0; 180^0] \Leftrightarrow \begin{cases} 90^0 \leq 33^0 + k90^0 \leq 180^0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{30} \leq k \leq \frac{49}{30} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{1\}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 123^0$

b. Ta có:

$$\sin(3x + 1) + \sin(3x - 1) = 0 \text{ (với } x \in [-\pi; \pi])$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Lại có:

$$x \in [-\pi;\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \le \frac{k\pi}{3} \le \pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le k \le 3 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0;\pm1;\pm2;\pm3\}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{0;\pm\frac{\pi}{3};\pm\frac{2\pi}{3};\pm\pi\right\}$

c. Ta có:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0 \text{ (với } x \in [0;14])$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 > 1 \text{ (loại vì } \cos x \le 1) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Lại có:

$$x \in [0;14] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{\pi}{2} + k\pi \le 14 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le k \le \frac{14}{\pi} - \frac{1}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0;1;2;3\}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right\}$

Bài 6: Giải các phương trình sau

a. $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$

b. $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x, x \in (0, 2\pi)$

Giải:

a. Ta có :

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$$
$$\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - 4\pi\right) = -\sin x$$

Như vậy, phương trình viết lại thành

$$\cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ nên nghiệm của phương trình là $x \in \left\{\pi; 2\pi; 3\pi; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}\right\}$

b. Phương trình tương đương với

$$\frac{2\cos 2x \sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Nếu $x \in (0, \pi)$ thì $\sin x > 0$ nên

$$\cos 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Khi đó,

$$x \in \left\{\frac{\pi}{16}; \frac{9\pi}{16}\right\}$$

Nếu $x \in (\pi, 2\pi)$ thì $\sin x < 0$ nên

$$\cos 2x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Khi đó,

$$x \in \left\{\frac{21\pi}{16}; \frac{29\pi}{16}\right\}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{\frac{\pi}{16}; \frac{9\pi}{16}; \frac{21\pi}{16}; \frac{29\pi}{16}\right\}$

Bài 7: Giải các phương trình sau

a. $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$ (Tuyển sinh khối D 2004)

b. $\sin x + \cos x + 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ (Tuyển sinh khối B 2005)

c. $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan\frac{x}{2}\right) = 4$ (Tuyển sinh khối B 2006)

d. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$ (Tuyển sinh khối A 2008)

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x\,(2\cos x - 1)$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$2\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \cos x + \sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x + \sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Ta thấy :

$$1 + \tan x \tan\frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos x \cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos x \cos\frac{x}{2} + \sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos x \cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

Do đó, phương trình tương đương với

$$\cot x + \tan x = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sin 2x}+\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{8}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị nguyên của x thỏa mãn

$$\cos\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=1$$

Giải: Phương trình tương đương với

$$\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2-16x-80}=3x-8k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8k\geq 0 \\ 9x^2-16x-80=(3x-8k)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8k\geq 0 \\ 9x=12k+4+\dfrac{49}{3k-1} \ \ (*) \end{cases}$$

Do đó, $3k-1$ là ước nguyên của 49. Ta được : $3k-1=\pm1,\pm7,\pm49$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0,-2,-16$. Thay vào $(*)$, ta được $x=-3,-21$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.1.1. Giải các phương trình sau:

a. $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b. $\sin 10x = 1$

c. $4\cos^2 x - 3 = 0$

d. $3\sin x - 2 = 0$

e. $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x$

5.1.2. Giải các phương trình sau:

a. $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

b. $1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

c. $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\sin^2(x+1) = 1$

e. $2\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}$

5.1.3. Giải các phương trình sau:

a. $\sin x = \sin\left(\frac{4x}{5} + 3\pi\right)$

b. $\cos(2x + \pi) = -\sin x$

c. $\sin x = -\cos 2x$

d. $\tan x + \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

e. $\cos 5x - \sin(3x + \pi) = 0$

5.1.4. Giải các phương trình sau:

a. $4\sin x \cos x \cos 2x = 1$

b. $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x \cos 32x = \frac{1}{64\sin x}$

c. $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1$

d. $\cos 3x - \cos 2x - \cos x = \sin 2x - \sin x - 1$

e. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

f. $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^3 3x$
g. $4\sin^3 x + 3\cos^2 x - 3\sin x - \sin^2 x \cos x = 0$
h. $\sin^6 x + \cos^6 x = 2(\sin^8 x + \cos^8 x)$
i. $\tan^2 x - \tan x \tan 3x = 2$

5.1.5. Giải các phương trình sau:

a. $\sin 2x = 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

b. $\cos x + \cos 3x = 0 , x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

5.1.6. Giải các phương trình sau:

a. $2 + 3\cos x = 2\tan\frac{x}{2}$ (Học Viện Ngân Hàng 1998)

b. $\frac{\cos x - 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$ (ĐH Ngoại Ngữ 1998)

c. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ (ĐH Ngoại Thương 1999)

d. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ (Tuyển sinh khối B 2002)

e. $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$ (Tuyển sinh khối D 2003)

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.1.1. Nghiệm của phương trình là :

a. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

b. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}\ (k \in \mathbb{Z})$

c. $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

d. $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

e. $x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

5.1.2. Nghiệm của phương trình là :

a. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

b. $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

c. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

d. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi - 1 \\ x = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}2\pi - 1 \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

e. $x = k\pi + (-1)^{n+1}.\frac{\pi}{4}$

5.1.3. Nghiệm của phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} x = 15\pi + k10\pi \\ x = -\frac{10\pi}{9} + \frac{k10\pi}{9} \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

c. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

d. $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$

e. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

5.1.4.

a. Sử dụng công thức nhân đôi $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ sẽ đưa phương trình trở thành :

$$\sin 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Tương tự câu a, ta cũng sử dụng công thức nhân đôi $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ sẽ đưa phương trình trở thành :

$$\sin 64x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{128} + \frac{k\pi}{32}\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$(\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Nghiệm của phương trình là :

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.\ \ (k \in \mathbb{Z})$$

e. Điều kiện :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Đặt $t = \tan x \Longrightarrow \sin 2x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Thay vào phương trình, ta được

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=0 \\ \tan x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

f. Để ý : $2\cos^2 4x = 1+\cos 8x$ và $4\cos^3 3x = 3\cos 3x - \cos 9x$

Phương trình có nghiệm $x = k2\pi (k\in\mathbb{Z})$

g. Phương trình tương đương với

$$(4\sin^2 x - 3)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$$

h. Phương trình tương đương với :

$$\sin^6 x\cos 2x - \cos^6 x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^6 x - \cos^6 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \ (k\in\mathbb{Z})$$

i. Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin x\cos 3x - \sin 3x\cos x) = 2\cos^2 x\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow -2\sin x\sin 2x = 2\cos^2 x\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos x\cos 3x \ \ (\cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - 1 = \cos 4x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

5.1.5.

a. Ta có:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}\ \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Lại có:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le \frac{\pi}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0\}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4}$

b. Ta có:

$$\cos x + \cos 3x = 0\ \left(x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \Leftrightarrow 2\cos 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \end{array}\right. (m, n \in \mathbb{Z})$$

Lại có:

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le \frac{\pi}{2} + m\pi \le \frac{\pi}{2} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \in \{0\} \\ n \in \{0\} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$

5.1.6.

a. Gợi ý :

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(-2\sin^2 x + \sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Phương trình tương đương với

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 6x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x - \cos 6x = \cos 12x - \cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(\cos 11x - \cos 7x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

e. Điều kiện :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} - (1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

II. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

- Phương trình bậc hai theo các hàm số lượng giác là những phương trình có dạng sau:

- $a\sin^2 x + b\sin x = c$
- $a\cos^2 x + b\cos x = c$
- $a\tan^2 x + b\tan x = c$
- $a\cot^2 x + b\cot x = c$

- Cách giải phương trình này thì ta sẽ coi các ẩn $\sin x, \cos x$, $\tan x$, $\cot x$ là các nghiệm của phương trình $at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$, đồng thời lưu ý đến các điều kiện của t.
- Chúng ta cũng sử dụng những phép biến đổi lượng giác để đưa phương trình ban đầu về các phương trình loại này.

Lưu ý các công thức lượng giác sau:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $2\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$

b. $2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0$

c. $\tan^4 x - 2\tan^2 x + 1 = 0$

d. $\cot^2 x + 2\cot x - 3 = 0$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{5}{2} < -1 \text{ (loại vì } \sin x \geq -1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta có:

$$2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$(\tan^2 x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Điều kiện:

$$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \cot x = 1 \\ \cot x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-3) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$

b. $\sin^4 x + \cos^4 x = -\frac{1}{2}\sin 2x$

c. $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{1}{2}\tan 2x$

d. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{11}{8} - \sin 2x$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 1 \\ \sin x = -3 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = -\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = -\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 1 \\ \sin x = -2 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos 2x} = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x} \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = -\frac{1}{2}\sin 2x$$

Đây chính là câu b của bài này.

Nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Phương trình tương đương với

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{11}{8} - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{11}{8} - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = \frac{3}{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$

b. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$

c. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$

d. $\sin^6 x + \cos^6 x - \sin 2x = 0$

e. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-3<-1\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$1-2\sin^2 2x\cos^2 2x=\sin 2x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2-(2\sin 2x\cos 2x)^2=2\sin 2x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x+\sin 4x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sin 4x=1\\ \sin 4x=-2<-1\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$$

c. Ta có:

$$\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$=\left(1-\frac{\sin^2 2x}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

Khi đó, phương trình tương đương:

$$\left(1-\frac{\sin^2 2x}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{17}{16}-\frac{17}{16}\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x+\sin^2 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = -1 \text{ (loại)} \\ \sin^2 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$1 - 3\sin^2 \cos^2 x - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{2}{3} \\ \sin 2x = -2 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)}{2} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

e. Phương trình tương đương với

$$\cos^4 \frac{x}{5} + 1 - \cos^2 \frac{x}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 \frac{x}{5} - \cos^2 \frac{x}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 \dfrac{x}{5} = 0 \\ \cos^2 \dfrac{x}{5} = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos \dfrac{x}{5} = 0 \\ \sin \dfrac{x}{5} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{2} + k10\pi \\ x = k5\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$

b. $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$

c. $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + \sqrt{2}\right)\cos x$

d. $\dfrac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

e. $\sin 2x\,(\cot x + \tan 2x) = 4\cos^2 x$

Giải:

a. Điều kiện:

$$\sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})(*)$$

Phương trình tương đương với

$$2\cos x\sin x + 3\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \sqrt{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$2\cos\left(\frac{2x+\frac{\pi}{4}+2x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{\pi}{4}-2x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}+4\sin x-2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2x+\left(4+\sqrt{2}\right)\sin x-2-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x-\left(4+\sqrt{2}\right)\sin x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=\sqrt{2}>1\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

c. Điều kiện:

$$\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+2\sqrt{2}\sin^2 x=\left(2+\sqrt{2}\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}-\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cos x}{\sin^2 x}+2\sqrt{2}=0$$

Đặt $t=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Phương trình trở thành

$$3t^2-\left(2+\sqrt{2}\right)t+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Khi $t=\sqrt{2}$, ta có:

$$\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \sqrt{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Khi $t = \dfrac{2}{3}$, ta có:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -2 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận các nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq -1 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$4(1 - \cos^2 2x) + 3(1 - \cos 2x) - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \ \left(\text{loại do } (*)\right) \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

e. Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x \neq 1\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$2\cos^2 x + \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} = 4\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x} = 2\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos^2 2x = \cos 2x\,(\cos 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -1\\ \cos 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ (ĐH GTVT Hà Nội 1999)

b. $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$ (Tuyển sinh khối B 2004)

c. $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$ (Tuyển sinh khối A 2005)

d. $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$ (Tuyển sinh khối D 2005)

e. $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ (Tuyển sinh khối A 2006)

Giải:

a. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6}+k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8}+k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8}+k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8}+k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện :

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$5\sin x - 2 = \frac{3(1-\sin x)\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \frac{3(1-\sin x)\sin^2 x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -2 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Phương trình tương đương với

$$2\cos^2 3x \cos 2x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 6x + 1)\cos 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos^2 2x = 1 \\ \cos^2 2x = -\frac{1}{4} \text{ (vô lý)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$2(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) sin \ \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x + \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

e. Điều kiện :

$$\sqrt{2} - 2\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$2 - 6\sin^2 x\cos^2 x - \sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3\sin^2 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{4}{3} < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.1. Giải các phương trình sau:

a. $\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

b. $\cos^2 x + 4\sin x - 4 = 0$

c. $1 + \cos 4x = \cos 2x$

d. $2\cos 2x + \cos x = 1$

e. $2\sin^2 2x - 2(2 + \sqrt{2})\sin x\cos x + \sqrt{2} = 0$

f. $\cos 2x + (10 - \sqrt{3})\sin x + 5\sqrt{3} - 1 = 0$

g. $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - \cos^2 2x - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2 = 0$

5.2.2. Giải các phương trình sau:

a. $5(1+\cos x) = 2+\sin^4 x - \cos^4 x$

b. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{2}{3}\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{3}$

c. $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \dfrac{1}{2}\cot 2x - \dfrac{1}{8\sin 2x}$

d. $\sin^4 x + \cos^4 x = -\dfrac{5}{12}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{21}{24}$

5.2.3. Giải các phương trình sau:

a. $48 - \dfrac{1}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\sin^2 x}(1+\cot 2x\cot x) = 0$

b. $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)} = \cos^4 4x$

c. $\tan^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$

d. $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

e. $\sin^4 x + \cos^4 x = 2\sin x\cos x - \dfrac{1}{2}\cos^2 2x$

f. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{2}\cos 2x - \dfrac{5}{8}$

g. $\dfrac{2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin x\cos x + 1}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.1. Nghiệm của phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

d. $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \arccos\left(\dfrac{3}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

e. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

f. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

g. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

5.2.2.

a. Phương trình tương đương với

$$5(1 + \cos x) = 2 + (\sin^2 - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 5 + 5\cos x = 2 + 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{3}{2} < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{3}\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \\ \sin x = \frac{1+\sqrt{7}}{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện :

$$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x}{5\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{2\sin 2x} - \frac{1}{8\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 8 - 16\sin^2 x\cos^2 x = 20\cos 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 20\cos 2x - 13 = 0 \Leftrightarrow -4\cos^2 2x + 20\cos 2x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = \dfrac{9}{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Phương trình tương đương với

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = -\frac{5}{24}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] + \frac{21}{24}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = -\frac{5}{24}(-\cos 4x + \sin 2x) + \frac{21}{24}$$

$$\Leftrightarrow 24 - 12\sin^2 2x = -5(-1 + 2\sin^2 2x + \sin 2x) + 21$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = 2 > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

5.2.3.

a. Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos^4 x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\left(1 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\sin^4 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 48\sin^4 x\cos^4 x - (\sin^4 x + \cos^4 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 2x = -\frac{2}{3} \text{ (vô lý)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq \pm 1 \ (*)$$

Ta có:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1$$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} = \cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 4x = 1 \\ \cos^2 4x = -\frac{1}{2} \text{ (vô lý)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$x = \frac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$

Với $(*)$ thì ta có: $\cos \mathrm{t} \neq 0$ và $\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$\tan^3 t = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 t = \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t} - 1$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2 t + \tan t)(\tan^2 t - 2\tan t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan t = 0 \\ \tan t = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Điều kiện :

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\cos 4x}{2\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

e. Phương trình tương đương với

$$1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin 2x - \frac{1}{2}(1 - \sin^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \sin 2x - \frac{1}{2}(1 - \sin^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -3 < -1 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

f. Phương trình tương đương với

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{2}\cos 2x-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow -4\sin^2 2x-20\cos 2x+21=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-10\cos 2x+13=0\ \text{(vô nghiệm vì } \Delta'=-1<0)$$

g. Điều kiện :

$$\sqrt{2}-2\sin x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$2(1-2\sin^2 x\cos^2 x)-4\sin x\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x-2\sin 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-3<-1\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO $\sin x$ VÀ $\cos x$

- Phương trình bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$ là những phương trình có dạng tổng quát :

$$a\sin x + b\cos x = c\ (a^2 + b^2 \neq 0)\ (*)$$

Những trường hợp đặc biệt :

- $a = 0, b \neq 0;(*)$ có dạng :

$$\cos x = \frac{c}{b}$$

- $a \neq 0, b = 0;\ (*)$ có dạng :

$$\sin x = \frac{c}{a}$$

- $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$; do $\cos x = 0$ không là nghiệm nên $(*)$ có dạng :

$$\tan x = -\frac{a}{b}$$

Phương pháp giải : (trường hợp $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)

Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta sẽ được phương trình:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ta thấy :

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

Nên có góc u thỏa mãn :

$$\begin{cases} \cos u = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin u = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành :

$$\cos u \sin x + \sin u \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + u) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi $c^2 \leq a^2 + b^2$

Khi đó, ta đặt

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Phương trình trở thành :

$$\sin(x + u) = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - u + k2\pi \\ x = \pi - \alpha - u + k2\pi \end{array} \right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

<u>Cách khác :</u>

- Chia 2 vế phương trình cho a, phương trình trở thành :

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha \ , \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

- Chia 2 vế phương trình cho b, phương trình trở thành :

$$\frac{a}{b} \cos x + \sin x = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{b} \cos \alpha \ , \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

- Với $x \neq \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thì ta đặt

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

Khi đó,

$$(*) \Leftrightarrow a \frac{2t}{1 + t^2} + b \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = c$$

$$\Leftrightarrow (b + c)t^2 - 2at + c - b = 0 \ \ (b + c \neq 0)$$

Giải t rồi suy ra x.

Một số công thức cần lưu ý :

$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a \pm \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos a \pm \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a \mp \frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}\sin a \pm \cos a = 2\sin\left(a \pm \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(a \mp \frac{\pi}{3}\right)$

$\sin a \pm \sqrt{3}\cos a = 2\sin\left(a \pm \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(a \mp \frac{\pi}{6}\right)$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$

b. $\sin 3x = \sqrt{2} + \cos 3x$

c. $3\sin x + \cos x = 1$

d. $\sin x + 5\cos x = 1$

e. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin x + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Giải:

a. Ta có:

$$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta có:

$$\sin 3x = \sqrt{2} + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Ta thấy $x = \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ không là nghiệm của phương trình.

Khi $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$. Ta đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

Phương trình trở thành:

$$\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = 0 \\ \tan\frac{x}{2} = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = k\pi \\ x = 2\arctan 3 + k2\pi \end{array}\right. \left(\text{thỏa } (*)\right)$$

d. Ta thấy $x = \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ không là nghiệm của phương trình.

Khi $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Ta đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

Phương trình trở thành:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{5(1-t^2)}{1+t^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = 1 \\ \tan\frac{x}{2} = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = 2\arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

e. Ta có:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos x = 2\ (*)$$

Vì $-\left(1-\sqrt{3}\right) \neq 2$ nên $\cos\frac{x}{2} = 0$ không là nghiệm của phương trình

Khi $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Ta đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

Phương trình $(*)$ trở thành:

$$\frac{(1+\sqrt{3})2t}{(1+t^2)}+\frac{(1-\sqrt{3})(1-t^2)}{(1+t^2)}=2$$

$$\Leftrightarrow (3+\sqrt{3})t^2-2(1+\sqrt{3})t+1+\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ t=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

<u>Bài 2:</u> Giải các phương trình sau:

a. $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

b. $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

c. $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$

<u>Giải:</u>

a. Điều kiện:

$$\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\ (*)$$

Với điều kiện $(*)$, phương trình tương đương với :

$$8\sin^2 x\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow 4(1-\cos 2x)\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow -4\cos 2x\cos x = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 3x - 2\cos x = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Ta có:

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Ta có:

$$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + 3\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

Vì $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 < \left(3 - \sqrt{2}\right)^2$ nên phương trình vô nghiệm.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x\,(1-2\cos x)=(\cos x-1)(2\cos x+1)$

b. $4\sin^3 x+4\cos x\sin^2 x+2\sin x=0$

c. $3-4\sin^2 x=4\cot x\cos^2 x-3\cot x$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\sin x-\sin 2x=2\cos^2 x-\cos x-1$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sin 2x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$2\sin x-4\sin^3 x+4\cos^3 x-2\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x+4\cos^3 x-3\cos x=\sin x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x=\sin x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

c. Điều kiện :

$$\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sin 3x-\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

<u>Bài 4:</u> Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$ (Tuyển sinh khối B 2008)

b. $\dfrac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ (Tuyển sinh khối A 2009)

c. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$ (Tuyển sinh khối B 2009)

<u>Giải:</u>

a. Phương trình tương đương với

$$\sin x\,(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sqrt{3}\cos x\,(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$

b. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \ (*) \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$$

Phương trình tương đương với

$$\cos x - 2\cos x \sin x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Thay nghiệm vào $(*)$ ta sẽ có nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$2\sin x + 2\cos x \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 3x = 4\cos 4x + 4\sin^3 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x + \sin 3x + \sin x + 2\sqrt{3}\cos 3x = 4\cos 4x + 3\sin x - \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x - 4\cos 4x + 2\sqrt{3}\cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{42} + \dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.4. Giải các phương trình sau:

a. $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}$

b. $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$

c. $2\sin x - 5\cos x = 5$

d. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos(-x) = \sqrt{3}$

5.2.5. Giải các phương trình sau:

a. $4\sin x \cos 3x + 2\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

b. $2\sqrt{3}\cot x - \frac{1}{\sin x} = 1 + \frac{\sqrt{3}\cot x}{\sin x} - \cot^2 x$

c. $\cos 2x - 3\sin x + \cos x - 2 = 0$

5.2.6. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$

b. $8\sin^2 2x\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$ (Tuyển sinh khối B 2007)

c. $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ (Tuyển sinh khối D 2007)

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.4. Nghiệm của phương trình :

a. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5}\ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

c. $x = 2\arctan\dfrac{5}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

d. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

5.2.5.

a. Phương trình tương đương với

$$2\sin x\cos 3x + 2\sin x\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\,(\cos 3x + \cos x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x\,(2\cos^2 x - 1) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Điều kiện :

$$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\sin 2x - \sin x = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Phương trình tương đương với

$$\sin^2 x - \cos^2 x + 3\sin x - \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x + 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

5.2.6.

a. Điều kiện :

$$\cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$4\sin 2x \sin 4x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x - 2\cos 6x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 6x = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi + 6x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG THEO $\sin x$ VÀ $\cos x$

Phương trình đối xứng theo $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng sau :

$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$

Phương pháp giải :

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(*), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Khi đó,

$$\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Thay vào phương trình, ta được :

$$at + \frac{b(t^2 - 1)}{2} = c$$

$$\Leftrightarrow bt^2 + 2at - b - 2c = 0 \ (**)$$

Ta giải $(**)$ tính ra t so điều kiện và thay t vào $(*)$ để tính x.

Ngoài ra, chúng ta còn một dạng có họ hàng với dạng ở trên :

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x = c$$

<u>Phương pháp giải :</u>

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) (*), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Khi đó,

$$\sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

Thay vào phương trình rồi làm tương tự như dạng trên.

<u>Bài 1:</u> Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 1$

b. $\left(1 + \sqrt{2}\right)(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 1 - \sqrt{2} = 0$

c. $5 \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

d. $\cos x \sin x = 6(\sin x - \cos x - 1)$

<u>Giải:</u>

a.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] (*)$

Khi đó, phương trình trở thành

$$t-\frac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t=1\ \big(\text{thỏa }(*)\big)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

b.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\ (*)$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\left(1+\sqrt{2}\right)t-(t^2-1)-1-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{2}\right)t+\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\sqrt{2} \end{array}\right.\big(\text{thỏa }(*)\big)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

c.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\ (*)$

Khi đó, phương trình trở thành

$$5(1-t^2)-12t+12=0$$

$$\Leftrightarrow 5t^2+12t-17=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = -\dfrac{17}{5} < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ $(*)$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\frac{1 - t^2}{2} = 6(t - 1)$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = -13 < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0$

b. $\cos 2x + 5 = (4 - 2\cos x)(\sin x - \cos x)$

c. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$

d. $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

e. $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$

Giải:

a.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ (*)

Khi đó, phương trình trở thành

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = -3 < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 5 = 4\sin x - 4\cos x - 2\cos x \sin x + 2\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - \cos x \sin x - 2 = 0 \ (1)$$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$2t - \frac{1 - t^2}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = -5 < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \ (*)$$

Ta biến đổi phương trình thành

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos x} \ (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{2}t = \frac{2}{t^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} t = \sqrt{2} \\ t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Phương trình tương đương với

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - 2\sin x \cos x - (\sin x + \cos x) = 0 \ (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) - (t^2 - 1) - t = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -2 < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

e. Phương trình tương đương với

$$2\sin^3 x + 2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x)(\sin x + 1) + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[2(1 + \cos x)(1 + \sin x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \ (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1) ta có nghiệm $x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Với phương trình (2), ta đặt

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

Khi đó, phương trình trở thành

$$t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $t = 0$ thì

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.7. Giải các phương trình sau:

a. $-1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x$

b. $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin x$

c. $\cos x\sin x+|\cos x+\sin x|=1$

5.2.8. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^3 x+\sin^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$

b. $\cos^3 x-\sin^3 x=-1$

c. $1+\cos^3 x-\sin^3 x=\sin 2x$

d. $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

e. $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=2(\sin x+\cos x)$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.7. Nghiệm của phương trình là :

a. $$\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\arcsin\frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

b. $$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

c. $x=\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

5.2.8. Nghiệm của phương trình là :

a. $x = \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

c. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

d. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

e. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THUẦN NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

Phương trình bậc hai thuần nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng :

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

Phương pháp giải :

Cách 1: Ta sử dụng công thức

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$$

Sau đó đưa phương trình về dạng:

$$\frac{c - a}{2} \cos 2x + \frac{b}{2} \sin 2x = d - \frac{a + c}{2}$$

Cách 2: Thay $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$; ta biến đổi đưa phương trình về dạng :

$$\mathrm{A}\sin^2 x + \mathrm{B}\sin x\cos x + \mathrm{C}\cos^2 x = 0$$

- Nếu $\mathrm{A} = 0$ (hoặc $\mathrm{C} = 0$) : ta đặt $\cos x$ (hoặc $\sin x$) làm nhân tử chung, ta sẽ có phương trình tích.
- Nếu $\mathrm{A} \neq 0$, xét thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình, ta tiến hành chia 2 vế cho $\cos^2 x$ thì đưa phương trình về dạng

$$\mathrm{A}\tan^2 x + \mathrm{B}\tan x + \mathrm{C} = 0\ (*)$$

Giải phương trình $(*)$ rồi so với điều kiện.

Ngoài ra chúng ta cũng có một dạng phương trình tương tự :

$$a\sin^3 x + b\cos^3 x + c\sin^2 x\cos x + d\sin x\cos^2 x + e\sin x + f\cos x = 0$$

Phương pháp giải : Chúng ta sử dụng cách 2 đã nêu ở trên (chia 2 vế cho $\cos^3 x$).

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x = 1 + \sin^2 2x$

b. $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$

c. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$

d. $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$

Giải:

a. Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế cho $\cos^2 x$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

b. Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế cho $\cos^3 x$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\tan x\,(1 + \tan^2 x) - 4\tan^3 x + 1 + \tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(3\tan^2 x + 2\tan x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

c. Phương trình tương đương với :

$$\sin^2 x + 1 + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế cho $\cos^2 x$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\tan^2 x + 1 + \tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

d. Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế cho $\cos^3 x$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x\,(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(3\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^2 x\,(\tan x - 2) = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$

b. $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

c. $3\cos^4 x - \sin^2 2x + \sin^4 x = 0$

d. $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0$

Giải:

a. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 3 - 6\sin^2 x + 3\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 4\tan^2 x - 2\tan x - 3(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 3 + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Phương trình tương đương với

$$2\sin x\sin 2x + 2\sin 3x = 12\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \cos 3x + 6\sin x - 8\sin^3 x = 12\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^3 x + 8\sin^3 x - 4\cos x - 6\sin x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$.

Khi đó, phương trình trở thành:

$$16 + 8\tan^3 x - 4(1+\tan^2 x) - 6\tan x\,(1+\tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x - 3\tan x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2 x - 3)(\tan x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \\ \tan x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

c. Ta đưa phương trình về dạng

$$3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^4 x$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 x = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

d. Ta đưa phương trình về dạng

$$4\sin^3 x - 4\cos^3 x - 3\sin x + \cos x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$.

Khi đó, phương trình trở thành:

$$4\tan^3 x - 4 - 3\tan(1 + \tan^2 x) + 1 + \tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa điều kiện } \cos x \neq 0)$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.9. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$

b. $\sin 2x + 2\tan x = 3$

c. $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

d. $2\cos^2 x + \cos 2x + \sin x = 0$

e. $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$

f. $4\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2\sin^2 x + \dfrac{5}{2}$

g. $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$

5.2.10. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = 2\sin 2x\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos^2 2x$

b. $\sin^4 x + \cos^4 x = -\dfrac{5}{4}\sin 2x\cos 2x - \dfrac{1}{4}\cos^2 2x + \dfrac{3}{2}$

c. $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$

d. $\tan x\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x)$

e. $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$

f. $\sqrt{2}\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin x$

g. $8\cos^3\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.9. Nghiệm của phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

b. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c. $\left[\begin{array}{l} x = \arctan \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + k\pi \\ x = \arctan \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{45} + k\pi \\ x = \arctan 3 + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

e. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

f. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

g. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \dfrac{1}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

5.2.10.

a. Phương trình tương đương với

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 2\sin 2x \cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 4\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x - 2 = 0$$

Vì $\cos 2x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 2x$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$\tan^2 2x + 4\tan 2x - 1 - 2(1 + \tan^2 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 2x - 4\tan 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\arctan(-3) + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos 2x \neq 0$)

b. Phương trình tương đương với

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = -\frac{5}{4}\sin 2x \cos 2x - \frac{1}{4}\cos^2 2x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 0$$

Vì $\cos 2x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 2x$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$4\tan^2 2x - 5\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{5} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos 2x \neq 0$)

c. Điều kiện:

$$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq \pm 1$$

Phương trình tương đương với

$$6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{10\sin 2x \cos 2x \cos x}{2\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow 10\sin x\cos^2 x + 2\cos^3 x - 6\sin x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$10\tan x + 2 - 6\tan x\,(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(3\tan^2 x + 3\tan x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ (loại vì } \tan x \neq 1)$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Do $\cos x \neq 0$ nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\tan^3 x - 2\tan^2 x = 3(1 - \tan^2 x + \tan x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

e. Phương trình tương đương với

$$\sin^3 x + \cos^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x - 3\cos x - \sin x = 0$$

TH1: Khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow \sin x = \pm 1$

Thay vào phương trình ta có:

$$(\pm 1)^3 + 0 + 3(\pm 1)^2.0 + 3(\pm 1).0 - 3.0 - (\pm 1) = 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm của phương trình

TH2: Khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\tan^3 x + 1 + 3\tan^2 x + 3\tan x - 3(1 + \tan^2 x) - \tan(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

f. Phương trình tương đương với

$$\sin^3 x + \cos^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x - 4\sin x = 0$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$\tan^3 x + 1 + 3\tan^2 x + 3\tan x - 4\tan(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(3\tan^2 x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$)

g. Phương trình tương đương với

$$\frac{8\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)^3}{8}=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x-3\sqrt{3}\cos^2 x\sin x+9\cos x\sin^2 x-3\sqrt{3}\sin^3 x=4\cos^3 x-3\cos x$$

Vì $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$1-3\sqrt{3}\tan x+9\tan^2 x-3\sqrt{3}\tan^3 x=4-3(1+\tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\tan^3 x-12\tan^2 x+3\sqrt{3}\tan x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

(thỏa điều kiện $\cos x\neq 0$)

5. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

a. TỔNG HỢP

- Phương trình tổng hợp là những phương trình đưa về phương trình tích mà trong đó, các nhân tử là các dạng phương trình đã nêu ở trên.

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$

b. $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0$

c. $\tan^2 x\cot^2 2x\cot 3x = \tan^2 x - \cot^2 2x + \cot 3x$

d. $\dfrac{(1-\cos x)^2 + (1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)} - \tan^2 x\sin x = \dfrac{1}{2}(1+\sin x) + \tan^2 x$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\,(2\cos x + 1) = \cos 2x\,(2\cos x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sin 2x - \cos 2x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(4\sin^2 x - 3) + \cos x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\sin^2 x - 3)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin^2 x - 3 = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\cot 3x\,(\tan^2 x \cot^2 2x - 1) = \tan^2 x - \cot^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \cot 3x\left[\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 4x)}{(1+\cos 2x)(1-\cos 4x)} - 1\right] = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} - \frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

$$\Leftrightarrow \cot 3x\,[(1-\cos 2x)(1+\cos 4x) - (1+\cos 2x)(1-\cos 4x)]$$
$$= (1-\cos 2x)(1-\cos 4x) - (1+\cos 4x)(1+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cot 3x\,(2\cos 4x - 2\cos 2x) = -2(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\sin 3x \sin x = \cos 3x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x\,(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{2(1+\cos^2 x)}{4(1-\sin x)} - \frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}(1+\sin x) + \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1+\cos^2 x) - (1+\sin x)\cos^2 x - 2\sin^2 x\,(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1-2\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0 \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \text{ (loại)} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ \vee\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \ \vee\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

b. $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$

c. $\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$

d. $\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\cos x\left(2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \sqrt{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$2(\sin 3x - \cos 3x) - \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x) - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)[3 - 4(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)] - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[-2 + 8\sin x\cos x - \frac{1}{\sin x\cos x}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin^2 2x - \sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{2}\cos x(\cos 2x + \cos x) + \frac{1}{2}\sin x(\cos 2x - \cos x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x - 1 - \sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) - \sin x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin x=-1 \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$\cos x+\cos 5x+\cos 3x+\cos 5x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x\cos 2x+\cos 4x\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 x-3\cos x)\cos 2x+(2\cos^2 2x-1)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x-3)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[(2\cos 2x-1)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ 4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos 2x=\frac{1+\sqrt{17}}{8} \\ \cos 2x=\frac{1-\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\pm\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}+k2\pi\right) \\ x=\pm\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{8}+k2\pi\right) \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sin\frac{5x}{2} = 5\cos^3 x \sin\frac{x}{2}$

b. $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x$

c. $2\cos^2\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$

d. $\sin 2x + 2\tan x = 3$

Giải:

a.

Dễ thấy $\cos\frac{x}{2} = 0$ không là nghiệm của phương trình nên nhân 2 vế cho $2\cos\frac{x}{2}$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 10\cos^3 x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sin 2x = 5\cos^3 x \sin x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 5\cos^3 x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 0 \\ 3 - 4\sin^2 x + 2\cos x = 5\cos^3 x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin\frac{x}{2} = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = 0 \text{ (loại)} \\ 5\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{-1+\sqrt{21}}{10} \\ \cos x = \frac{-1-\sqrt{21}}{10} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pm \arccos\dfrac{-1+\sqrt{21}}{10} + k2\pi \\ x = \pm \arccos\dfrac{-1-\sqrt{21}}{10} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$\sin^8 x\,(1 - 2\sin^2 x) + \cos^8 x\,(1 - 2\cos^2 x) = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^8 x \cos 2x - \cos^8 x \cos 2x = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x\,(\sin^8 x - \cos^8 x) = 5\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 4(\sin^8 x - \cos^8 x) = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 4(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 4(\sin^2 x - \cos^2 x)\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 4\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin^2 2x = -\dfrac{1}{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$1 + \cos\frac{12x}{5} + 1 = 3\left(2\cos^2\frac{4x}{5} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{4x}{5} - 6\cos^2\frac{4x}{5} - 3\cos\frac{4x}{5} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{4x}{5}-1\right)\left(4\cos^2\frac{4x}{5}-2\cos\frac{4x}{5}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{4x}{5}-1=0 \\ 4\cos^2\frac{4x}{5}-2\cos\frac{4x}{5}-5=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{4x}{5}=1 \\ \cos\frac{4x}{5}=\frac{1-\sqrt{21}}{4} \\ \cos\frac{4x}{5}=\frac{1+\sqrt{21}}{4}>1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5k\pi}{2} \\ x=\pm\frac{5}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4}+\frac{15\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

d. Điều kiện:

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\ (*)$$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}+2\tan x=3$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^3 x-3\tan^2 x+4\tan x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x-1)(2\tan^2 x-\tan x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x-1=0 \\ 2\tan^2 x-\tan x+3=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a. $2(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x+\frac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

c. $8(\sin^6 x+\cos^6 x)+3\sqrt{3}\sin 4x=3\sqrt{3}\cos 2x-11\sin 2x+11$

d. $\sqrt{3}\sin 2x\,(2\cos x+1)+2=\cos 3x+\cos 2x-3\cos x$

Giải:

a. Điều kiện:

$$\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$2(1-\tan x)\left(1+\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right)=1+\tan x$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(1-\tan x)(1+\tan x)^2}{1+\tan^2 x}=1+\tan x$$

$$\Leftrightarrow(1+\tan x)\left(\frac{2-2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(1+\tan x)(3\tan^2 x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x+1=0\\ 3\tan^2 x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x\cos x}{\sin x + \cos x} = 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin x} + \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[\sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x(\sin x + \cos x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\sin x\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0\ (1) \\ \sin x + \cos x - \sqrt{2}\sin x\cos x = 0\ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1), ta có:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ \left(\text{thỏa } (*)\right)$$

Với phương trình (2), ta có:

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Khi đó, $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Phương trình (2) trở thành:

$$t - \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ t = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$(2\sin^2 x)^3+(2\cos^2 x)^3+3\sqrt{3}\sin 4x=3\sqrt{3}\cos 2x-9\sin 2x+11$$

$$\Leftrightarrow (2\cos 2x+1)^3+(1-2\cos 2x)^3+3\sqrt{3}\sin 4x=3\sqrt{3}\cos 2x-9\sin 2x+11$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x=3\sqrt{3}\cos 2x-9\sin 2x+11$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 2x+2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x=3\sqrt{3}\cos 2x-9\sin 2x+11$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)\left(\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\sin 2x\,(2\cos x+1)=4\cos^3 x+2\cos^2 x-6\cos x-3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x\,(2\cos x+1)=(2\cos x+1)(2\cos^2 x-3)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x+1)\left(\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x+1)\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x+1=0 \\ \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a. $\cos x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x=0$

b. $|\cos x+2\sin 2x-\cos 3x|=1+2\sin x-\cos 2x$

c. $2\cos^3 x+\cos 2x+\sin x=0$

d. $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\cos x\,(2\cos^2 2x-1)+\cos 2x\,(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(3\cos^2 2x-2\sin^2 x\cos 2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos 2x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{17}}{8} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta thấy :

$$|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = |4\cos x \sin^2 x + 2\sin 2x| = 2(1+\sin x)|\sin 2x|$$

Và $1 + 2\sin x - \cos 2x = 2\sin x\,(1+\sin x)$. Nên phương trình đã cho viết thành

$$2(1+\sin x)|\sin 2x| = 2\sin x\,(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+\sin x = 0\ (1) \\ |\sin 2x| = \sin x\ \ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1) có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Với phương trình (2) chỉ thỏa mãn $\sin x \geq 0$. Trong điều kiện này, phương trình (2) tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ |\cos x| = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x + 1) - (1-\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)[2(1+\sin x)(\cos x+1) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)[1 + 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$1 + (\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x\cos 2x) = \sin 2x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x\cos 2x)(\sin 2x + \cos 2x + 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ (Tuyển sinh khối A 2005)

b. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ (Tuyển sinh khối B 2005)

c. $\cos 3x+\cos 2x-\cos x+1=0$ (Tuyển sinh khối D 2006)

d. $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (Tuyển sinh khối A 2010)

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$(4\cos^3 x-3\cos x)^2\cos 2x-\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,(4\cos^2 x-3)^2\cos 2x-\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,[(4\cos^2 x-3)^2\cos 2x-1]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,[(16\cos^4 x-24\cos x+9)(2\cos^2 x-1)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,(32\cos^6 x-64\cos^4 x+42\cos^2 x-10)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,(\cos^2 x-1)(32\cos^4 x-32\cos^2 x+10)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=\pm 1 \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình là:

$$x=\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$1+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(2\cos x + 1) + \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{c} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(2\cos^2 x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\arccos\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{(1 + \sin x + 2\cos^2 x - 1)(\sin x + \cos x)}{\sqrt{2}.\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 2\cos^2 x)\cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(2\cos^2 x + \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(1 + \sin x - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.11. Giải các phương trình sau:

a. $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

b. $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

c. $\sin 2x - \cos 2x = 3\sin x + \cos x - 2$

d. $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0$

e. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

5.2.12. Giải các phương trình sau:

a. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$

b. $3\tan^3 x - \tan x + \dfrac{3(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$

c. $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$

d. $\tan^2 x\,(1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0$

5.2.13. Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

b. $\cos x\,(\cos 4x + 2) + \cos 2x \cos 3x = 0$

c. $1 + \cot 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

d. $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

e. $4\cos^2 x - \cos 3x = 6\cos x + 2(1 + \cos 2x)$

f. $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$

5.2.14. Giải các phương trình sau:

a. $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$

b. $\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

c. $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

d. $\tan^4 x + 1 = \dfrac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$

e. $3\cos^4 x - 4\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = 0$

f. $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

5.2.11.

a. Phương trình tương đương với

$$4\sin x \cos x - (1 - 2\sin^2 x) = 7\sin x + 2\cos x - 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x \cos x - 7\sin x - 2\cos x + 2\sin^2 x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\,(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x\,(1 - \sin x) + (1 - \sin x)(2\sin x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$2\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x = 3\sin x + \cos x - 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Qua các bài a, b và c thì ta thấy có cùng dạng phương trình là:

$$a\sin 2x + b\cos 2x + c\sin x + d\cos x + e = 0\ (*)$$

Nguyên gốc phương trình trên là xuất phát từ phương trình này:

$$(a_1\sin x + a_2\cos x + a_3)(a_4\sin x + a_5\cos x + a_6) = 0\ (**)$$

Từ phương trình $(**)$ người ta khai triển ra và thêm bớt vào để đưa về phương trình $(*)$.

Cách giải thông thường là chúng ta sử dụng công thức $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ và công thức $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ hay $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ xem cái nào có thể đưa phương trình $(*)$ phương trình $(**)$.

d. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4\cos x - \frac{2}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x \sin 2x - \cos 2x \cos x + 4\cos^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(1 - 2\cos^2 x) - \cos 2x \cos x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos 2x - \cos 2x \cos x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

e. Phương trình tương đương với

$$\sin x\,(\sin^2 x - 1) + \cos^3 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos^2 x + \cos^3 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(\sin 2x - \cos 2x - 3) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

5.2.12.

a. Phương trình tương đương với

$$\sin x - \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^3 x - \cos^3 x + \sin^4 x - \cos^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x + \cos x + 1 + \sin x \cos x + \sin x + \cos x) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

b. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với :

$$3\tan^3 x - \tan x + 3(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 4\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \tan x\,(3\tan^2 x - 1) + 3(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 4(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \tan x\,(3\tan^2 x - 1) + (1 + \sin x)(3 + 3\tan^2 x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x\,(3\tan^2 x - 1) + (1 + \sin x)(3\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan^2 x - 1)(\tan x + 1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan^2 x - 1)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \arcsin\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + k2\pi \end{array}\right.$$

c. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với :

$$3\cos^2 x\,(1 - \sin x) - 5\sin^2 x\,(1 - \cos x) = 2\sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x\,(\cos x - \cos x \sin x + \sin x) - 5\sin x\,(\sin x - \sin x \cos x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x \cos x)(3\cos x - 5\sin x) = 0$$

Kết hợp với (∗), ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \arcsin\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \\ x = \arctan\dfrac{3}{5} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sin^2 x\,(1 - \sin^3 x) + (\cos^3 x - 1)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) + (\cos^3 x - 1)(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin^2 x + \sin^2 x \cos x - \cos^2 x - \sin x \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$$

Kết hợp với (∗), ta nhận nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

5.2.13.

a. Phương trình tương đương với

$$\sin x\,(2\sin^2 x - 1) = (1 - \cos x)(2\cos^2 x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1)(\sin x + \cos x + 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$\cos x\,(\cos 4x + 2) + \cos 2x\,(4\cos^3 x - 3\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,[\cos 4x + 2 + \cos 2x\,(4\cos^2 x - 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,[2\cos^2 2x - 1 + 2 + \cos 2x\,(2\cos 2x + 2 - 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(4\cos^2 2x - \cos 2x + 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện:

$$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sin^2 2x + \cos 2x \sin 2x = 1 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x + \cos 2x \sin 2x = 1 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d. Phương trình tương đương với

$$\cos^2 x\,(\cos x + 1) + 2(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x+1)-2(1-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)[(1+\sin x)(\cos x+1)-2]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x-1)=0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

e. Phương trình tương đương với

$$4\cos^2 x+3\cos x-4\cos^3 x=6\cos x+2(2\cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(4\cos^2 x-3)=0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x=\pi+k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

f. Phương trình tương đương với

$$1+\sin x+\cos 3x-\cos x-\sin 2x-1+2\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x-2\sin 2x\sin x-2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(1-2\sin 2x-2\cos x+2\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,[(\sin x-\cos x)^2+2(\sin x-\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(\sin x-\cos x)(\sin x-\cos x+2)=0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

5.2.14.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin^2 2x - 1}{\sin 2x} + \frac{2\sin^2 x - 1}{\sin x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos^2 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin 2x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(\cos 2x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{5x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\sin 2x - 2\cos\frac{3x}{2}\cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}(\sin 2x - \cos 2x - 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$2\sin x\cos x - \cos x - 2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) - (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - \sin x + 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos^4 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 2\sin 3x - \sin^2 2x\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 2\sin 3x - \sin^2 2x\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x = 4\sin 3x - 2\sin^2 2x\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x\,(2\sin 3x - 1) = 2(2\sin 3x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin 3x - 1)(\sin^2 2x - 2) = 0$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{17\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

e. Phương trình tương đương với

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin^2 x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\,(4\cos^2 x - 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

f. Phương trình tương đương với

$$2\sin x\cos x = 1 + \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x = 2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos x\left(\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{13\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

- Ở dạng phương trình chứa căn thức này, chúng ta thường áp dụng các công thức bên dưới. Sau khi giải đến phần so điều kiện thì chúng ta sẽ thử nghiệm trực tiếp.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow A = B \geq 0$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases}$
- $\sqrt{AB} = \begin{cases} \sqrt{A}.\sqrt{B}, & A \geq 0 \text{ và } B \geq 0 \\ \sqrt{-A}.\sqrt{-B}, & A \leq 0 \text{ và } B \leq 0 \end{cases}$

Bài 1: Giải phương trình sau:

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x \cot x + \cos^3 x \tan x = \sqrt{2 \sin 2x}$$

Giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x > 0 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x \cos x + \cos x \sin^2 x = \sqrt{2 \sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin x + \cos x) + \cos^2 x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2 \sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sqrt{2 \sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2 \sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ 1 + 2 \sin x \cos x = 2 \sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \sin 2x = 1 \text{ (thỏa } (*) \text{)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + l2\pi \end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$$

Giải: Phương trình tương đương với

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -3 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3: Giải phương trình sau:

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}$$

(ĐH Kinh Tế Quốc Dân 2000)

Giải: Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \ (*) \\ 4\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 8\sin 2x \cos^2 2x \ \ (1) \end{cases}$$

Ta giải phương trình (2) :

$$2\left[1 - \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 + 4\sin 4x \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sin 6x) = 1 + 2(\sin 6x + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kiểm tra điều kiện $(*)$, ta nhận nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + m2\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + m2\pi \end{array}\right. \ (m \in \mathbb{Z})$$

Bài 4: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$$

Với $\cos x + \sin x = 0$, ta được

$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Với $\cos x + \sin x > 0$ và $\cos x - \sin x \geq 0$ thì

$$\sqrt{\sin x+\cos x}\left(\sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\sin x+\cos x}\right)=2\sqrt{\sin x+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x-\sin x}+\sqrt{\sin x+\cos x}=2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x+2\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}=4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=(2-\cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+4\cos x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-5 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.2.15. Giải phương trình sau:

a. $\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0$

b. $\left(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x}\right)\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$

c. $\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x}=4\cos x$

d. $\sin x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=2$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.2.15.

a. Phương trình tương đương với

$$\sqrt{1+\sin x} = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0 \\ 1+\sin x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin^2 x + \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b. Điều kiện :

$$\cos x \ge 0 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\left(\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \sin 2x \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x} = \sin 2x \ (1) \\ \cos 2x = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} \sin 2x \ge 0 \\ 1 + 2\sqrt{\cos x\,(1-\cos x)} = \sin^2 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \ge 0 \\ (2\cos^2 x - 1)^2 + 2\sqrt{\cos x\,(1-\cos x)} = 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Với phương trình (2) ta có

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Điều kiện :

$$\begin{cases}\sin 2x \le 1\\ \sin 2x \ge 1\\ \sin x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \ge 0\\ 1-\sin 2x+1+\sin 2x+2\sqrt{1-\sin^2 2x}=4\sin^2 2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \ge 0\\ \sqrt{1-\sin^2 2x}=2\sin^2 2x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \ge 0\\ \sin^2 2x \ge \dfrac{1}{2}\\ 1-\sin^2 2x=4\sin^4 2x-4\sin^2 2x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 4\sin^4 2x-3\sin^2 2x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=0\\ \sin^2 2x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d.

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), t \geq 0\ (*)$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\sqrt{t} = 2 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \ \left(\text{kết hợp } (*)\right) \\ t = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

Do đó,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

- Các phương trình không mẫu mực là các phương trình không có một cách giải cụ thể nào, thường là sử dụng các bất đẳng thức hoặc đạo hàm hàm số để đánh giá và tìm ra nghiệm.
- Chúng thường sử dụng các bất đẳng thức sau:
  - $-1 \leq \sin x \leq 1$
  - $-1 \leq \cos x \leq 1$
  - $\begin{cases} A \geq B \\ A \leq B \end{cases} \Rightarrow A = B$
  - $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$
  - $\begin{cases} A \leq B \leq C \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow A = B = C$
  - $\begin{cases} A \leq B \leq C \\ A = C \end{cases} \Rightarrow A = B = C$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^{13} x + \cos^{14} x = 1$

b. $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$\sin^{13} x + \cos^{14} x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\,(\sin^{11} x - 1) + \cos^2 x\,(\cos^{12} x - 1) = 0$$

Ta có:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x \leq 1 \\ \sin^2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x\,(\sin^{11} x - 1) \leq 0 \\ \begin{cases} \cos x \leq 1 \\ \cos^2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x\,(\cos^{12} x - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\,(\sin^{11} x - 1) + \cos^2 x\,(\cos^{12} x - 1) \leq 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1\\ \cos^2 x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1\\ \cos^2 x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$\sin^5 x+\cos^5 x=\sin^2 x+\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\,(\sin^3 x-1)+\cos^2 x\,(\cos^3 x-1)=0$$

Ta có:

$$\begin{cases}\begin{cases}\sin x\le 1\\ \sin^2 x\ge 0\end{cases}\Rightarrow \sin^2 x\,(\sin^3 x-1)\le 0\\ \begin{cases}\cos x\le 1\\ \cos^2 x\ge 0\end{cases}\Rightarrow \cos^2 x\,(\cos^3 x-1)\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\,(\sin^3 x-1)+\cos^2 x\,(\cos^3 x-1)\le 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Qua 2 bài trên chúng ta thấy rằng với a, b không đồng thời bằng 2, dạng phương trình:

$$\sin^a x + \cos^b x = 1 \ (*)$$

Chúng ta thường giải như sau:

$$(*) \Leftrightarrow \sin^a x + \cos^b x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^{a-2} x - 1) + \cos^2 x (\cos^{b-2} x - 1) = 0$$

Khi đó, chúng ta sử dụng các đánh giá:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x \le 1 \\ \sin^2 x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x (\sin^{a-2} x - 1) \le 0 \\ \begin{cases} \cos x \le 1 \\ \cos^2 x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x (\cos^{b-2} x - 1) \le 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sin^2 x (\sin^{a-2} x - 1) + \cos^2 x (\cos^{b-2} x - 1) \le 0$$

Đến đây, ta xét dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^{b-2} x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^{a-2} x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^{a-2} x = 1 \\ \cos^{b-2} x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ngoài ra, chúng ta cũng có thể làm như sau :

$$\begin{cases} \sin^a x \le \sin^2 x \\ \cos^b x \le \cos^2 x \end{cases} \Longrightarrow \sin^a x + \cos^b x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Đến đây, chúng ta cũng xét dấu " = " xảy ra đối với phương trình $(*)$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$

b. $\dfrac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x}$

c. $\cos^5 x + \sin^7 x + \dfrac{1}{2}(\cos^3 x + \sin^5 x)\sin 2x = \cos x + \sin x$

Giải:

a. Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \; (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}\tan x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện:

$$4\cos^2 2x + \sin^2 2x \neq 0 \Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x \neq \frac{2}{3}\ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{1 - 3\sin^2 x\cos^2 x}{4\cos^2 2x + \sin^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x}{4\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\sin^8 x - 1) + \cos^2 x\,(\cos^8 x - 1) = 0$$

Ta có:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x \leq 1 \\ \sin^2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x\,(\sin^8 x - 1) \leq 0 \\ \begin{cases} \cos x \leq 1 \\ \cos^2 x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x\,(\cos^8 x - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sin^2(\sin^8 x - 1) + \cos^2 x\,(\cos^8 x - 1) \leq 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^8 x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^8 x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^8 x = 1 \\ \cos^8 x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Phương trình tương đương với

$$\cos^5 x + \cos^4 x\sin x + \sin^7 x + \sin^6 x\cos x = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x\,(\cos x + \sin x) + \sin^6 x\,(\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^4 x + \sin^6 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0 \ (1) \\ \cos^4 x + \sin^6 x = 1 \ (2)\end{array}\right.$$

Với phương trình (1) ta có nghiệm

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Với phương trình (2), ta thấy

$$\begin{cases}\sin^6 x \leq \sin^2 x \\ \cos^4 x \leq \cos^2 x\end{cases} \Longrightarrow \cos^4 x + \sin^6 x \leq 1$$

Do đó,

$$\cos^4 x + \sin^6 x = 1 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 0\end{cases} \\ \begin{cases}\cos^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

b. $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$

c. $\sqrt{\sin x} + \sin^2 x + \sin x + \cos x = 1$

Giải:

a. Phương trình tương đương với

$$4\cos 4x\,(1 + \cos 4x) + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos 4x + 1 = 0 \\ 1 - \cos 3x = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$4\sin^2 3x \sin^2 x = 6 + 2\sin 3x$$

Ta có :

$$\begin{cases} 6 + 2\sin 3x \geq 4 \ (\text{do} \sin 3x \geq -1) \\ 4\sin^2 3x \sin^2 x \leq 4 \ \left(\text{do} \begin{cases} \sin^2 3x \leq 1 \\ \sin^2 x \leq 1 \end{cases}\right) \end{cases}$$

Suy ra

$$4\sin^2 3x \sin^2 x \leq 4 \leq 6 + 2\sin 3x$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Điều kiện :

$$\sin x \geq 0 \ (*)$$

Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$\sin x + \sqrt{\sin x} + \frac{1}{4} - \left(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \cos x\right)\left(\sqrt{\sin x} - \cos x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\sin x} + \cos x = 0 \ (1) \\ \sqrt{\sin x} - \cos x + 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1), ta có :

$$\begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin x = 1 - \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi \text{ (loại vì } \cos x \le 0) \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với phương trình (2), ta có :

$$\sqrt{\sin x} = \cos x - 1$$

Mà với mọi x, ta đều có

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \ge 0 \\ \cos x \le 1 \end{cases}$$

Do đó,

$$\sqrt{\sin x} = \cos x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a. $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$

b. $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0$

c. $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x$

Giải:

a. Ta biến đổi phương trình trở thành

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2$$

Ta thấy :

$$\begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + m\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta biến đổi phương trình trở thành

$$\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$$

Ta thấy :

$$\begin{cases} \cos 2x \leq 1 \\ \cos\frac{3x}{4} \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \cos 2x + \cos\frac{3x}{4} \leq 2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\frac{3x}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = \frac{8n\pi}{3} \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = 8k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = 8k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$2(\cos x - \cos 28x \sin x) = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$\text{VT} = \cos x - \cos 28x \sin x \le \sqrt{1 + \cos^2 28x} \le \sqrt{2}$$

Mặt khác :

$$\text{VP} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x \ge 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Do đó, phương trình trở thành

$$\begin{cases} \cos^2 28x = 1 \ (1) \\ \cos x \cos 28x = -\sin x \ \ (2) \\ \sin 10x = 1 \ (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) cho nghiệm

$$x = \frac{k\pi}{28} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình (3) cho nghiệm

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5} \ (n \in \mathbb{Z})$$

Suy ra

$$\frac{k\pi}{28} = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5} \Leftrightarrow 5(k-7) = 28(n-1)$$

Khi đó,

$$\begin{cases} k - 7 = 28t \\ n - 1 = 5t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Suy ra

$$x = \frac{(28t+7)\pi}{28} = \frac{\pi}{4} + t\pi \ (t \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm này chỉ thỏa mãn phương trình (2) nếu t chẵn. Do đó, nghiệm của phương trình

$$x = \frac{\pi}{4} + m2\pi \ (m \in \mathbb{Z})$$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a. $6 - 4x - x^2 = \dfrac{5}{\left|\sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right|}$

b. $\tan^4 x + \tan^4 y + 2\cot^2 x \cot^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$

c. $\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) = 1$

d. $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y$

<u>Giải:</u>

a. Điều kiện :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \sin\dfrac{2y}{x} \neq 0 \end{cases} (*)$$

Ta có :

$$\begin{cases} 6 - 4x - x^2 = 10 - (2 + x)^2 \leq 10 \\ \dfrac{5}{\left|\sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right|} = \dfrac{10}{\left|\sin\dfrac{2y}{x}\right|} \geq 10 \end{cases}$$

Vậy phương trình chỉ thỏa khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 6 - 4x - x^2 = 10 \\ \left|\sin\dfrac{2y}{x}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} (*)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\tan^4 x + \tan^4 y \geq 2\tan^2 x \tan^2 y$$

Suy ra

$$\text{VP} \geq 2(\tan^2 x \tan^2 y + \cot^2 x \cot^2 y)$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy, ta được :

$$\tan^2 x \tan^2 y + \cot^2 x \cot^2 y \geq 2$$

Nên $\text{VP} \geq 4$. Mặt khác, ta thấy

$$\text{VT} = 3 + \sin^2(x + y) \leq 4$$

Do đó, phương trình chỉ thỏa khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \tan^4 x = \tan^4 y \ (1) \\ \tan^2 x \tan^2 y = \cot^2 x \cot^2 y \ (2) \\ \sin^2(x + y) = 1 \ (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\tan^2 x = \tan^2 y = 1$$

Kết hợp với (3) ta được

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z}) \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z})$$

Thử lại với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

c. Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \\ \sin(x+y) \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có :

$$\cot(x+y) = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} \Longrightarrow \tan x \cot(x+y) + \cot(x+y)\tan y + \tan x \tan y = 1$$

Ta thấy :

$$\tan x \cot(x+y) + \cot(x+y)\tan y + \tan x \tan y$$
$$\leq \frac{\tan^2 x + \cot^2(x+y) + \cot^2(x+y) + \tan^2 y + \tan^2 y + \tan^2 x}{2}$$

Nên

$$1 = \tan x \cot(x+y) + \cot(x+y)\tan y + \tan x \tan y \leq \tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y)$$

Vậy phương trình chỉ thỏa khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \tan x = \cot(x+y) \\ \cot(x+y) = \tan y \\ \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + m\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + m\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

d. Điều kiện :

$$\sin 2x \neq 0 \ (*)$$

Ta có :

$$\mathrm{VT} = (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) + 4 = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4$$
$$\geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 + 16) + 4 = \frac{25}{2}$$

Mặt khác,

$$\mathrm{VP} = 12 + \frac{1}{2}\sin y \leq \frac{25}{2}$$

Do đó, phương trình chỉ thỏa khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a. $3\left(1+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\right)^4+4\tan^6 x=7$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

b. $\sin^{1975} x-\cos^{1975} x=\frac{1}{\sin^{2007} x}-\frac{1}{\cos^{2007} x}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

c. $\cos 5x+\cos x=\sin 3x-\cos 3x$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

Giải:

a. Điều kiện:

$$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (*)$$

Ta đặt :

$$\begin{cases}u=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+1\\ v=\tan^2 x\end{cases}$$

Phương trình đưa về dạng

$$3u^4+4v^3=7\ (1)$$

Mà ta có :

$$u+v=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+(1+\tan^2 x)=\frac{\cos 2x+1}{\cos^2 x}=\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}=2$$

Do đó,

$(1)\Leftrightarrow 3u^4+4(2-u)^3=7$

$\Leftrightarrow (u-1)^2\underbrace{(3u^2+2u+25)}_{>0}=0$

$\Leftrightarrow u=1$

Thay vào (1), ta được :

$$\tan x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b. Nhận xét $\sin x=\pm 1$ không là nghiệm của phương trình vì nếu $\sin x=\pm$ thì phương trình không thỏa mãn. Tương tự, $\cos x=\pm 1$ không là nghiệm của phương trình.

Khảo sát hàm số: $f(t) = t^{1975} - \frac{1}{t^{2007}}$ trên $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

$$f'(t) = 1975t^{1974} + \frac{2007}{t^{2008}} > 0 \text{ với } t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

Nên hàm số tăng trên mỗi khoảng xác định. Ngoài ra hàm số này với $t \in (0; 1)$ sẽ chỉ nhận giá trị âm và với $t \in (0; 1)$ chỉ nhận giá trị dương. Cho nên mỗi giá trị $f(t)$ trên khoảng này không thể ứng với giá trị của $f(t)$ trên khoảng kia.

Cho nên phương trình $f(\sin x) = f(\cos x)$ tương đương với $\sin x = \cos x$ $(*)$.

Giải $(*)$ thì ta được nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c.

Nếu $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{cases} \text{VT} = \cos 5k\pi + \cos k\pi = \pm 2 \\ \text{VP} = \sin 3k\pi - \cos 3k\pi = \pm 1 \end{cases}$$

Do đó, phương trình không có nghiệm $x = k\pi$.

Nếu $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ta nhân 2 vế phương trình cho $2\sin x$, ta được

$$\sin 6x - \sin 4x + \sin 2x = -\cos 4x + \cos 2x - \sin 4x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\,(\cos 3x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos 3x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{3} \; (k \neq 3h, h \in \mathbb{Z}) \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \end{array}\right. (m, n \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a. $(2\cos 3x + 6\cos x + 1)^3 = 162\cos x - 27$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

b. $3^{2009x+3\cos x} - 3^{2009x+4\cos^3 x} - 3\cos 3x = 0$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2009)

c. $\sin x \sqrt[2008]{\sin^2 x + 2008} - (\cos x + 1)\sqrt[2008]{\cos^2 x + 2\cos x + 2009}$
$= \cos x - \sin x + 1$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2009)

d. $\tan x = \cos^2\left(2x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin x \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right)$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2010)

Giải:

a. Đặt $t = 2\cos x, |t| \le 2$. Ta có : $t^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3t - 1}$

Lại đặt $u = \sqrt[3]{3t - 1}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} t^3 = 3u - 1 \\ u^3 = 3t - 1 \end{cases}$$

Trừ 2 phương trình theo từng vế, ta được

$$t^3 - u^3 = 3(u - t)$$

$$\Leftrightarrow (t - u)\underbrace{(t^2 + tu + u^2 + 3)}_{>0} = 0$$

Từ đó suy ra $t = u \Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0$

Vậy

$$8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình tương đương với

$$3^{2009x+3\cos x} - 3^{2009x+4\cos^3 x} = 3(4\cos^3 x - 3\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 3^{2009x+3\cos x} + 3(2009x + 3\cos x) = 3^{2009x+4\cos^3 x} + 3(2009x + 4\cos^3 x)$$

Xét hàm số

$$f(t) = 3^t + 3t, t \in \mathbb{R}$$
$$f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0$$

Do đó, $f(t)$ đồng biến. Vậy ta suy ra

$$2009x + 3\cos x = 2009x + 4\cos^3 x$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$\sin x \sqrt[2008]{\sin^2 x + 2008} + \sin x = (\cos x + 1)\sqrt[2008]{(\cos x + 1)^2 + 2008} + \cos x + 1$$

Xét hàm số

$$f(t) = t + t\sqrt[2008]{t^2 + 2008}, t \in \mathbb{R}$$
$$f'(t) = 1 + \sqrt[2008]{t^2 + 2008} + \frac{t^2}{1004}.\frac{1}{\sqrt[2008]{(t^2 + 2008)^{2007}}} > 0$$

Do đó, $f(t)$ đồng biến. Khi đó, phương trình tương đương với

$$\sin x = \cos x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$$

d. Ta có:

$$\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b$$
$$= (1 - \cos^2 a)(1 - \sin^2 b) - \cos^2 a \sin^2 b$$

Suy ra

$$\cos^2 a + \sin^2 b + \sin(a + b)\sin(a - b) = 1\ (1)$$

Đặt $a = 2x + \frac{5\pi}{12}; b = x + \frac{5\pi}{12}$

Phương trình (1) trở thành:

$$\cos^2\left(2x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin x \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = 1$$

Do đó, phương trình đã cho trở thành

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 8: Giải các phương trình sau:

a. $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\sin^2 x}-\left(2+\sqrt{2}\right)^{\cos^2 x}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{\cos 2x}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$

b. $\left(\tan x+\frac{1}{4}\cot x\right)^{n}=\sin^n x+\cos^n x\,,n\in\mathbb{N},n\geq 2$

c. $\sin x+\cos x-\sin x\cos x=1-\ln\frac{3+\sin x+\cos x}{4+\sin x\cos x}$

Giải:

a. Ta xét các trường hợp :

- $\cos 2x>0$ thì $\cos^2 x>\sin^2 x$. Suy ra

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^{\cos^2 x}>\left(2+\sqrt{2}\right)^{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow\left(2+\sqrt{2}\right)^{\sin^2 x}-\left(2+\sqrt{2}\right)^{\cos^2 x}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{\cos 2x}<\left(2-\sqrt{2}\right)^{\cos 2x}<1$$

Mặt khác :

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}>1$$

Do đó, phương trình vô nghiệm.

- $\cos 2x<0$, chứng minh tương tự, ta được :

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^{\sin^2 x}-\left(2+\sqrt{2}\right)^{\cos^2 x}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{\cos 2x}>1>\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$$

Do đó, phương trình vô nghiệm.

- $\cos 2x=0$, ta thấy họ nghiệm thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$$

b. Điều kiện :

$$\sin 2x \neq 0 \ (*)$$

- $n = 2$, phương trình đã cho trở thành

$$\left(\tan x + \frac{1}{4}\cot x\right)^2 = 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\tan^2 x + \frac{1}{16}\cot^2 x + \frac{1}{2} \geq 1$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\tan x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\arctan\frac{1}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- $n > 2$, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\left|\tan x + \frac{1}{4}\cot x\right|^n = \left(|\tan x| + \frac{1}{4}|\cot x|\right)^n \geq 1$$

Mặt khác :

$$\begin{cases} |\sin^n x| \leq \sin^2 x \\ |\cos^n x| \leq \cos^2 x \end{cases} \Longrightarrow |\sin^n x| + |\cos^n x| \leq 1$$

Nên

$$|\sin^n x + \cos^n x| \leq |\sin^n x| + |\cos^n x| \leq 1 \leq \left|\tan x + \frac{1}{4}\cot x\right|^n$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |\sin^n x| = \sin^2 x \\ |\cos^n x| = \cos^2 x \\ |\tan x| = \frac{1}{4}|\cot x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right. \ (m \in \mathbb{Z}) \\ |\tan x| = \frac{1}{4}|\cot x| \end{cases}$$

Ta thấy hệ trên vô nghiệm. Do đó, kết hợp với $(*)$, ta có nghiệm của phương trình :

$$x = \pm\arctan\frac{1}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c. Ta có :

$$3+\sin x+\cos x=3+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0,\forall x$$

$$4+\sin x\cos x=4+\frac{1}{2}\sin 2x>0,\forall x$$

Do đó, phương trình luôn xác định. Khi đó, ta đưa phương trình trở thành

$$\ln(4+\sin x\cos x)+4+\sin x\cos x=\ln(3+\sin x+\cos x)+3+\sin x+\cos x$$

Ta đặt

$$\begin{cases}u=4+\sin x\cos x>0\\ v=3+\sin x+\cos x>0\end{cases}$$

Phương trình đưa về dạng

$$\ln u+u=\ln v+v$$

Ta xét hàm số :

$$f(t)=\ln t+t,t>0$$

$$f'(t)=\frac{1}{t}+1>0$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $(0,\infty)$. Khi đó,

$$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$$

$$\Leftrightarrow 4+\sin x\cos x=3+\sin x+\cos x\Leftrightarrow(\sin x-1)(1-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 9: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\frac{5}{2}$

b. $\tan^2 x+\tan^2 2x+\cot^2 3x=1$

c. $2\log_3\tan x=\log_2\sin x$

Giải:

a. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\sin x+\sin 3x+\sin 2x=2\cos x\sin 2x+2\sin x\cos x$$

$$\leq 2\sqrt{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\sin^2 2x+\cos^2 x)}=2\sqrt{\sin^2 2x+\cos^2 x}$$

$$=2\sqrt{\frac{25}{16}-\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2}\leq 2.\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos 2x = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\cos x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x = \dfrac{5}{4} \\ \cos x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Ta thấy, hệ này vô nghiệm. Do đó, phương trình vô nghiệm.

b. Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Ta có :

$$\frac{1}{\cot 3x} = \tan(2x + x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x \tan 2x + \tan 2x \cot 3x + \cot 3x \tan x = 1$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$1 = \tan x \tan 2x + \tan 2x \cot 3x + \cot 3x \tan x \leq \tan^2 x + \tan^2 2x + \cot^2 3x$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\tan x = \tan 2x = \tan 3x \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan x \\ \cot 3x = \tan x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \cot 3x = 0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta thấy, hệ trên vô nghiệm. Do đó, phương trình vô nghiệm.

c. Điều kiện :

$$\begin{cases} \tan x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\log_3 \tan^2 x = \log_2 \sin x \Leftrightarrow \log_3 \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \log_2 \sin x$$

Ta đặt $t = \log_2 \sin x$ thì $\sin x = 2^t$. Khi đó,

$$\log_3 \frac{4^t}{1 - 4^t} = t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1 \ (1)$$

Ta xét hàm số :

$$f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t$$

$$f'(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t \ln\frac{4}{3} + 4^t \ln 4 > 0$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà ta thấy $f(-1) = 1$ nên $t = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Với $t = -1$ thì

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, nghiệm của phương trình là :

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.2.16. Giải các phương trình sau:

a. $3\sin^5 x + 5\cos^5 x = 5$

b. $\sin 7x + \cos 2x = 2$

c. $\cos 3x + \cos\frac{5x}{4} - 2 = 0$

d. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$

e. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin^7 x)$

5.2.17. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$

b. $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$

c. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$

d. $\tan 2x + \tan 3x + \frac{1}{\sin x \cos 2x \cos 3x} = 0$

e. $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.2.17.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \leq 3 \\ \cos x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Khi đó, phương trình tương đương:

$$\sqrt{3-\cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \cos x = 5 + \cos x + 4\sqrt{\cos x + 1}$$

$$\Leftrightarrow -2(\cos x + 1) = 4\sqrt{\cos x + 1}\ (1)$$

Lại có:

$$\begin{cases} 4\sqrt{\cos x + 1} \geq 0 \\ -2(\cos x + 1) \leq 0 \end{cases}$$

Khi đó,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{\cos x + 1} = 0 \\ -2(\cos x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Điều kiện:

$$\cos^2 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\left(1.\cos 3x + 1.\sqrt{2-\cos^2 3x}\right)^2 \leq 2(\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x) = 4$$

$$\Rightarrow \cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} \leq 2$$

Lại có:

$$2(1+\sin^2 2x) \geq 2$$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \\ \sin^2 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos 3x = \pm 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ x = \dfrac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = m2\pi\ (m \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = m2\pi\ (m \in \mathbb{Z})$$

c. Phương trình tương đương với

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\cos 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{4}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + 1) + 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3$$

Ta có:

$$\begin{cases} \cos 2x \leq 1 \\ \cos 4x \leq 1 \\ \cos 6x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x \leq 3$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

d. Điều kiện:

$$\sin 2x \cos 2x \cos 3x \neq 0 \ (*)$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{1}{\sin x \cos 2x \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left(\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \sin 5x = -1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

e. Phương trình tương đương với

$$(1 + \cos 6x) \cos 2x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x \cos 2x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$$

Ta có:

$$\begin{cases} \cos 8x \leq 1 \\ \cos 4x \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \cos 8x + \cos 4x \leq 2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

d. PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ

- Ở những phương trình này, chúng ta có một số phương pháp thông dụng thường gặp như sau :
  - Phương pháp lượng giác :
    - Phương trình có dạng $\cos f(x) = m$, $\sin f(x) = m, f(x) \in \mathbb{R}$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.
    - Phương trình có dạng $a \cos f(x) + b \sin f(x) = c, f(x) \in \mathbb{R}$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.
    - Chú ý : Nếu miền giá trị của $f(x)$ không phải $\mathbb{R}$ thì điều kiện trên chỉ là điều kiện cần.
  - Phương pháp đại số : Cho phương trình lượng giác (1) có chứa tham số, sơ đồ giải và biện luận có thể theo các thứ tự sau :
    - Biến đổi (1) thành phương trình (2) có thể đặt ẩn phụ, ở đây có thể xuất hiện điều kiện (I). Nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) với điều kiện (I).
    - Xét phương trình (2), đặt ẩn phụ để trở thành phương trình đại số (3) kèm điều kiện của ẩn phụ là (II).
    - Nếu điều kiện (I) có thể biến đổi thành điều kiện (III) tương đương trong ẩn phụ thì ta kết luận : Điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm là (3), (II), (III) có nghiệm.
    - Trong trường hợp (I) không thể biến đổi thành điều kiện mới trong ẩn phụ, ta phải kiểm tra trực tiếp nghiệm của (1) khi cần phải đối chiếu điều kiện (I).
    - Bài toán sẽ ít phức tạp hơn nếu ta có không có điều kiện (I), nghĩa là (1) tương đương (2).
  - Phương pháp dùng miền giá trị :
    - Phương pháp này chỉ dùng được sau khi biến đổi phương trình lượng giác thành phương trình đại số chỉ có bậc nhất hoặc bậc hai. Bằng phương pháp đạo hàm hay phương pháp bất đẳng thức, ta không cần vẽ đồ thị hàm số mà chỉ cần miền giá trị khi cần tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.
- Nhắc lại công thức so sánh nghiệm : Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$, kí hiệu là $f(x)$, có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và hai số $\alpha < \beta$. Ta có
  - $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi

$$af(\alpha) < 0$$

- $x_1 < x_2 < \alpha$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$$

- $\alpha < x_1 < x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

- $\alpha < x_1 < \beta < x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$$

- $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \end{cases}$$

- $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$$

- $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

<u>Bài 1:</u> Định *m* để phương trình sau có nghiệm:

a. $(m-1)\sin x + (2-m) = 0$

b. $m\cos x - 1 = (2m+3)\cos x$

c. $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = m$

Giải:

a. Ta xét 2 trường hợp

Khi $m = 1$ thì $0 \sin x = -1$ (vô lý).

Khi $m \neq 1$ thì

$$\sin x = \frac{m-2}{m-1}$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \leq \frac{m-2}{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$$

b. Đưa phương trình về dạng

$$(m+3)\cos x = -1$$

Khi $m = -3$ thì $0 \cos x = -1$ (vô lý)

Khi $m \neq -3$ thì

$$\cos x = \frac{-1}{m+3}$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \leq \frac{-1}{m+3} \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$$

c. Ta biến đổi phương trình trở thành

$$\sin 2x + 3\cos 2x = -2m + 1$$

Khi đó, để phương trình có nghiệm thì

$$1 + 9 \geq (-2m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{10}}{2}$$

Bài 2: Cho phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{3}{2}$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm vào khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

Giải: Ta biến đổi phương trình trở thành

$$2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m\end{array}\right. \ (*)$$

a.

Khi $m = \frac{3}{2}$, phương trình trở thành

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{3}{2} > 1 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b.

Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in [-1; 0)$

Khi đó,

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2} \notin [-1; 0) \text{ (loại)} \\ \cos x = m\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = m$$

Ta có :

$$\cos x \in [-1; 0) \Leftrightarrow m \in [-1; 0)$$

Bài 3: Cho phương trình sau:

$$(1-a)\tan^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$$

a. Giải phương trình khi $a = \frac{1}{2}$

b. Tìm a để phương trình có nhiều hơn một nghiệm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải: Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$(1-a)\sin^2 x - 2\cos x + (1+3a)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a\cos^2 x - 2\cos x + 1 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)[a(2\cos x + 1) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = \frac{1}{2} \\ a(2\cos x + 1) - 1 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

a.

Khi $a = \frac{1}{2}$ thì

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$, ta nhận nghiệm trên là nghiệm của phương trình.

b.

Khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in (0; 1)$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \in (0;1) \\ 2a\cos x = 1 - a\end{array}\right.$$

Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ 0 < \dfrac{1-a}{2a} < 1 \\ \dfrac{1-a}{2a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < a < 1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 4: Cho phương trình

$$\cos 4x + 6\sin x \cos x = m$$

a. Giải phương trình khi $m = 1$

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Giải: Phương trình đưa về dạng

$$2\sin^2 2x - 3\sin 2x + m - 1 = 0$$

a.

Khi $m = 1$, phương trình trở thành

$$2\sin^2 2x - 3\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0 \\ \sin 2x = -\dfrac{3}{2} < -1 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

b.

Khi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thì $\sin 2x \in [0; 1]$

Đặt $f(x) = 2\sin^2 2x - 3\sin 2x + m - 1$

Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ 0 \leq \dfrac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{17}{8}$$

Bài 5: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x} = m$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

Giải: Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét nghiệm trên $[-\pi, \pi]$

Điều kiện:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

Ta có :

$$\begin{cases} 2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + 2\cos x}\,\sqrt{1 + 2\sin x} = m^2 \ (*) \\ m > 0 \end{cases}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$.

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right]$

Mặt khác, ta lại có : $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$. Do đó,

$$(*) \Leftrightarrow 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1} = m^2$$

Xét hàm số

$$f(t) = 2t + 2 + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}, t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right]$$

$$f'(t) = 2 + \frac{4t + 2}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}} > 0$$

t	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\sqrt{3}+1$	$\nearrow$	$4(\sqrt{2}+1)$

Từ bảng biến thiên, ta kết luận rằng phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{3}+1 \le m^2 \le 4\left(\sqrt{2}+1\right) \\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{3}+1} \le m \le 2\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

Bài 6: Xác định m để phương trình

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$$

có đúng 7 nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

(ĐH Y Dược Tp.HCM 1999)

Giải: Phương trình tương đương với

$$4\cos^3 x - 3\cos x - (2\cos^2 x - 1) + m\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \ (1) \\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0 \ (2)\end{array}\right.$$

Với phương trình (1), ta có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ nên

$$x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

Với phương trình (2), ta đặt $t = \cos x\,, |t| \le 1$. Khi đó :

$$f(t) = 4t^2 - 2t + m - 3 = 0 \ (3)$$

Do phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi x, nên ta cần xác định m để phương trình (2) có 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

Khi đó, phương trình (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện

$$-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4.f(0) < 0 \\ 4.f(-1) > 0 \\ 4.f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

Bài 7: Cho phương trình tham số m

$$2\cos 2x + \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x = m(\sin x + \cos x)$$

a. Giải phương trình khi $m = 2$

b. Tìm m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

(ĐH Sư Phạm Tp.HCM 2001)

Giải: Phương trình tương đương với

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x \cos x\,(\sin x + \cos x) = m(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x \cos x - m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x + \cos x = 0\ (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x \cos x - m = 0\ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1), ta có nghiệm

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Với phương trình (2), ta đặt $t = \cos x - \sin x$, $|t| \le \sqrt{2}$. Khi đó, phương trình (2) trở thành

$$-t^2 + 4t + 1 = 2m\ (3)$$

a. Khi $m = 2$ thì

$$(3) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = 3\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta có :

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -1 \le \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Longrightarrow t \in [-1; 1]$$

Do đó, ta cần xác định m để phương trình (3) có nghiệm $t \in [-1; 1]$. Xét hàm số :

$$f(t) = -t^2 + 4t + 1, t \in [-1; 1]$$

$$f'(t) = -2t + 4 > 0$$

Hàm số đồng biến trên $[-1; 1]$. Ta có :

$$\begin{cases} f(-1) = -4 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương với

$$-4 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$$

Bài 8: Giải và biện luận phương trình theo tham số m

$$\frac{m^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + m^2 - 2}{\cos 2x}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \tan x \ne \pm 1 \\ \cos 2x \ne 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình tương đương với

$$m^2\cos^2 x = \sin^2 x + m^2 - 2$$

Khi đó, ta đặt $t = \cos^2 x$, $t \in [0,1]$. Ta đưa phương trình về dạng

$$(m^2 + 1)t = m^2 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \ (1)$$

Tuy nhiên, do điều kiện $(*)$ ta được

$$t \in (0,1] \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Do đó, để phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \leq 1 \\ \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 1 \\ |m| \neq \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta thấy, từ phương trình (1), ta có thể suy ra nghiệm của phương trình là

$$x = \pm \arccos \frac{m^2-3}{m^2+1} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 9: Định m để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{m \cos x}{2\cos 2x - 1} = \frac{m + \sin x}{(\cos^2 x - 3\sin^2 x)\tan x}$$

Giải: Ta có :

$$2\cos 2x - 1 = \cos^2 x - 3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x$$

Nên ta có điều kiện của bài toán là

$$\begin{cases} \sin^2 x \neq \dfrac{1}{4} \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình đưa về dạng

$$m \sin x = m + \sin x \ \ (1)$$

Đặt $t = \sin x$, $|t| \leq 1$, phương trình (1) trở thành

$$(m-1)t = m \ (2)$$

Ta thấy, $m = 1$ không là nghiệm của phương trình (2) nên

$$t = \frac{m}{m-1}$$

Tuy nhiên, do điều kiện $(*)$ ta được

$$t \neq \left\{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$$

Khi đó, điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm là

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{m}{m-1} < 1 \\ \dfrac{m}{m-1} \neq 0 \\ \dfrac{m}{m-1} \neq \pm \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{3} \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Do đó, ta tìm được giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \setminus \left\{0; \frac{1}{3}; \pm 1\right\}$$

Bài 10: Cho phương trình chứa tham số m

$$\frac{m \sin x - 2}{m - 2\cos x} = \frac{m \cos x - 2}{m - 2\sin x}$$

Khi $m \neq 0$ phương trình có bao nhiêu nghiệm nằm trong đoạn $[20\pi; 25\pi]$

(ĐH Cần Thơ 1998)

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \cos x \neq \dfrac{m}{2} \\ \sin x \neq \dfrac{m}{2} \end{cases} (*)$$

Phương trình tương đương với

$$(m \sin x - 2)(m - 2\sin x) = (m \cos x - 2)(m - 2\cos x)$$

$$\Leftrightarrow -2m \sin^2 x + (m^2 + 4)\sin x - 2m = -2m \cos^2 x + (m^2 + 4)\cos x - 2m$$

$$\Leftrightarrow 2m(\cos^2 x - \sin^2 x) + (m^2 + 4)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[2m(\cos x + \sin x) - (m^2 + 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \sin x \ (1) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m^2+4}{2\sqrt{2}m} \ (2) \end{array}\right.$$

Với phương trình (1), ta có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Với phương trình (2), phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{m^2+4}{2\sqrt{2}|m|} \le 1 \Leftrightarrow \left(|m| - \sqrt{2}\right)^2 + 2 \le 0$$

Do đó, phương trình (2) vô nghiệm. Mặt khác, ta thấy nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện $(*)$ khi $m \neq 0$, ta xét :

$$\begin{cases} 20\pi \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le 25\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = \{20; 21; 22; 23; 24\}$$

Như vậy, phương trình đã cho có 5 nghiệm nằm trong đoạn $[20\pi; 25\pi]$.

<u>Bài 11:</u> Cho phương trình chứa tham số m

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cot^2 x + m(\tan x + \cot x) + 2 = 0$$

Xác định m để phương trình vô nghiệm.

(ĐH Giao Thông Vận Tải 1995)

<u>Giải:</u> Điều kiện :

$$\sin 2x \neq 0 \ (*)$$

Phương trình tương đương với

$$\tan^2 x + \cot^2 x + m(\tan x + \cot x) + 3 = 0$$

Đặt $t = \tan x + \cot x$, $|t| \ge 2$. Khi đó, phương trình trở thành

$$t^2 + mt + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -t - \frac{1}{t}$$

Xét hàm số

$$f(t) = -t - \frac{1}{t}, |t| \geq 2$$

$$f'(t) = -1 + \frac{1}{t^2} < 0, \forall t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

t	$-\infty$	-2	2	∞
$f'(t)$	$-$	‖	$+$	
$f(t)$	$+\infty \searrow$	$\frac{5}{2}$ ‖	$-\frac{5}{2} \searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là :

$$-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$$

<u>Bài 12:</u>

a. Giải phương trình :

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x \ \ (1)$$

b. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) tương đương với phương trình

$$\sin 3x - m\sin x = (4 - 2|m|)\sin^2 x \ \ (2)$$

(ĐH Thái Nguyên 2000)

<u>Giải:</u>

a. Phương trình tương đương với

$$\sin 3x + 1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin 3x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Phương trình (2) tương đương với

$$3\sin x - 4\sin^3 x - m\sin x = (4 - 2|m|)\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,[4\sin^2 x + 2(2-|m|)\sin x + m - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 0 \\ 4\sin^2 x + 2(2-|m|)\sin x + m - 3 = 0\ (*) \end{array}\right.$$

- Điều kiện cần :

Phương trình (1) và (2) tương đương thì phương trình $(*)$ phải được thỏa bởi phương trình

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Điều này tương đương với

$$4.\frac{1}{4} + 2(2-|m|).\frac{1}{2} + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow |m| = m \Leftrightarrow m \geq 0$$

- Điều kiện đủ :

Với $m \geq 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x = 0 \\ 4\sin^2 x - 2(m-2)\sin x + m - 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{m-3}{2} \end{array}\right.$$

Như vậy, phương trình (1) và (2) tương đương với nhau khi và chỉ khi

$$\left\{\begin{array}{l} m \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m-3}{2} = 0 \\ \dfrac{m-3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \left|\dfrac{m-3}{2}\right| > 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} m = 3 \\ m = 4 \\ 0 \leq m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$$

Bài 13: Xác định m để hai phương trình sau tương đương

$$\cos 3x = 4\cos(3\pi + x) \ (1)$$

$$m\cos^2 x + (1-m)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0 \ (2)$$

Giải: Phương trình (1) tương đương với

$$4\cos^3 x - 3\cos x = -4\cos x$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 x + 1)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0$$

Phương trình (2) tương đương với

$$m\cos^2 x + (1-m)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(m\cos x + 1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\cos x = 0\\ m\cos x + 1 - m = 0\end{array}\right.$$

Với $m = 0$ thì phương trình (1) và (2) tương đương với nhau.

Với $m \neq 0$ thì phương trình (2) tương đương

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \dfrac{m-1}{m}\end{array}\right.$$

Do đó, phương trình (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m-1}{m} = 0\\ \left|\dfrac{m-1}{m}\right| > 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m < \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Từ các giá trị trên, ta có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là

$$m < \frac{1}{2} \vee m = 1$$

Bài 14: Cho phương trình chứa tham số m

$$4\cos^5 x\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x + m$$

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình thỏa mãn bất phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$

Biết rằng $x = -\dfrac{\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình

Giải: Phương trình tương đương với

$$4\sin x\cos x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 4x + m$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x = \sin^2 4x + m$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin^2 4x + m\ (1)$$

Thế $x = -\dfrac{\pi}{8}$ vào (1) thì $m = -2$

Với $m = -2$ thì (1) trở thành

$$\sin^2 4x - \sin 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = -1 \\ \sin 4x = 2\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Bất phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} \leq x \leq -1\ (*) \\ 1 \leq x \leq \sqrt{2}\ (**) \end{array}\right.$$

Họ nghiệm vừa tìm được thỏa mãn $(*)$ khi

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \leq -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \leq -1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow x \in \emptyset$$

Họ nghiệm vừa tìm được thỏa mãn $(**)$ khi

$$\begin{cases} 1 \leq -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \leq \sqrt{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow k = 1$$

Do đó, ta có được nghiệm của phương trình thỏa yêu cầu bài toán là

$$x = \frac{3\pi}{8}$$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.2.18. Cho phương trình:

$$\frac{5 + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\sin x} = \frac{6\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

a. Giải phương trình khi $a = -\dfrac{\pi}{4}$

b. Tìm a để phương trình có nghiệm

5.2.19. Cho 2 phương trình sau:

$$2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x)$$

Tìm a để 2 phương trình tương đương.

(ĐH Y Dược Tp.HCM 1998)

5.2.20. Cho phương trình sau:

$$\sin^2 x + (2m - 2)\sin x \cos x - (m + 1)\cos^2 x = m$$

a. Giải phương trình khi $m = -2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

5.2.21. Cho phương trình sau:

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

5.2.22. Tìm m để hai phương trình sau tương đương

$$2\sin^7 x + (m-1)\sin^3 x + (2m^3 - 2m - 1)\sin x = 0$$

$$2\sin^6 x + (2-m)\cos^2 x + 2m^3 - m - 2 = 0$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

5.2.23. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $mx^2 + 2\cos x = 2$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

5.2.18. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos a \neq 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình trở thành

$$3\sin 2a \sin x + 4\cos x = 5\ (1)$$

a.

Khi $a = -\frac{\pi}{4}$ thì (1) trở thành

$$-\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$$

Ta đặt

$$\begin{cases} \cos y = -\frac{3}{5} \\ \sin y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Khi đó, phương trình trở thành:

$$\cos y \sin x + \sin y \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + y) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -y + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\arccos\frac{-3}{5} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

b. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$(3\sin 2a)^2 + (4)^2 \geq (5)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos a \neq 0 \\ \sin^2 2a \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos a \neq 0 \\ \sin^2 2a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos a \neq 0 \\ \cos 2a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

5.2.19. Ta đặt

$$\begin{cases} 2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \ \ (1) \\ 4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) \ (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Lại có:

$$(2) \Leftrightarrow 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = a\cos x + 2(4 - a)\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + (4 - 2a)\cos^2 x + (a - 3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,[4\cos^2 x + 2(2 - a)\cos x + a - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(2\cos x+3-a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{a-3}{2}\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{a-3}{2}=0\\ \dfrac{a-3}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{a-3}{2}>1\\ \dfrac{a-3}{2}<-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=3\\ a=4\\ a<1\\ a>5\end{array}\right.$$

5.2.20. Khi $\cos x=0$ ta có:

$$\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x=1\\ \sin^2 x=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=1\\ \sin x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=1\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Vậy khi $m\neq 1$ thì $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình. Khi ấy, ta chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$.

Khi đó, phương trình trở thành:

$$(m-1)\tan^2 x-2(m-1)\tan x+2m+1=0$$

a. Khi $m=-2\neq 1$ thì ta có

$$\tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\ (\text{thỏa } \cos x\neq 0)$$

b. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m\neq 1\\ \Delta'\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m\neq 1\\ -m^2-m+2\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -2\leq m\leq 1$$

5.2.21.

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Phương trình trở thành

$$-t^2 + 4t + 1 = m$$

Đặt $f(t) = -t^2 + 4t + 1 = m$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Suy ra $f'(t) = 4 - 2t > 0$ với $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Khi đó tập giá trị của $f(t)$ là $[f(-\sqrt{2}); f(\sqrt{2})] = [-4\sqrt{2} - 1; 4\sqrt{2} + 1]$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $f(t) = m$ có nghiệm $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow m \in [-4\sqrt{2} - 1; 4\sqrt{2} + 1]$$

5.2.22. Ta đặt

$$\begin{cases} 2\sin^7 x + (m-1)\sin^3 x + (2m^3 - 2m - 1)\sin x = 0 \ (1) \\ 2\sin^6 x + (2-m)\cos^2 x + 2m^3 - m - 2 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm là $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình (1) tương đương với phương trình (2) thì điều kiện cần là phương trình (2) phải có nghiệm $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 2\sin^6(k\pi) + (2-m)\cos^2(k\pi) + 2m^3 - m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

Khi $m = 1$ thay vào 2 phương trình và giải ra 2 tập nghiệm không trùng nhau nên loại $m = 1$.

Khi $m = -1$ và $m = 0$ thay vào 2 phương trình và giải ra 2 tập nghiệm trùng nhau nên nhận $m = -1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

5.2.23. Chứng minh được $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $m=\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ hay $m=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2, t=\frac{x}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

Ta chứng minh được $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

Do $\lim\limits_{t \to 0} f(t)=\lim\limits_{t \to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=1$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8}{\pi^2}$

Thế nên điều kiện cần và đủ để thỏa yêu cầu bài toán là $f(t)=m$ có đúng một nghiệm trong $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ là $\frac{8}{\pi^2} \leq m \leq 1$

CHƯƠNG 6

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG GẶP

1. PHƯƠNG PHÁP THẾ

- Phương pháp thế là một phương pháp cơ bản trong việc giải hệ phương trình lượng giác. Thông thường, ta có ba cách sử dụng ở phương pháp này : thế trực tiếp, biến đổi rồi thế sau, giải tìm nghiệm của một phương trình rồi thế vào phương trình còn lại.

2. PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

- Trong phương pháp này ta sẽ có một số loại cơ bản cần nắm :
  - i. Loại 1 : $\begin{cases} \sin\alpha x\sin\beta x = a \\ \cos\alpha x\cos\beta x = b \end{cases}$
  - ii. Loại 2 : $\begin{cases} \sin\alpha x\sin\beta x = a \\ m\tan\alpha x = n\tan\beta x \end{cases}$
  - iii. Loại 3 : $\begin{cases} \cos\alpha x\cos\beta x = a \\ m\tan\alpha x = n\tan\beta x \end{cases}$
  - iv. Loại 4 : $\begin{cases} \cos\alpha\, x\sin\beta x = a \\ \tan\alpha x\tan\beta x = b \end{cases}$
  - v. Loại 5 : $\begin{cases} \sin\alpha x\cos\beta x = a \\ \sin\beta x\cos\alpha x = b \end{cases}$
- Ở những loại này ta thường có ba bước giải : đổi $\tan\alpha x$, $\cot\beta x$ thành $\sin\alpha x$, $\cos\beta x$; cộng và trừ hai phương trình của hệ để được một hệ phương trình mới cơ bản hơn; giải hệ vừa có để tìm nghiệm.

3. PHƯƠNG PHÁP KHỬ SAU KHI BÌNH PHƯƠNG

- Có hai dạng đặc trưng trong phương pháp này :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha\sin ay \\ g(x) = \alpha\cos ay \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(y) = \alpha\sin bx \\ g(y) = \alpha\cos bx \end{cases}$$

- Phương pháp này cũng thường gồm ba bước giải : bình phương hai vế hai phương trình của hệ; cộng lại thì được một phương trình một ẩn số; giải phương trình vừa tìm được rồi thế nghiệm vào hai phương trình ban đầu để kiểm tra.

4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

- Ngoài ra, ta còn có nhiều phương pháp khác, chẳng hạn như : đặt ẩn phụ; sử dụng bất đẳng thức cổ điển, dùng đạo hàm…

II. CÁC BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: Giải hệ phương trình sau:

$$(*)\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

Giải: Ta có

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{x-y}{2}=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=k2\pi\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}-k2\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau :

$$(*)\begin{cases}2x-3y=\dfrac{\pi}{3}\\ \sin 2x\cos 3y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

Giải: Ta có

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{1}{2}[\sin(2x+3y)+\sin(2x-3y)]=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin(2x + 3y) + \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} \\ 2x + 3y = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{4} \\ y = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

<u>Bài 3:</u> Giải hệ phương trình sau:

$$(*) \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$$

(ĐH Y Dược Tp.HCM 1997)

<u>Giải:</u> Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x + \sin y - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin y - \cos x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$(*) \begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2} \\ \tan x \cot y = 1 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện:

$$\cos x \sin y \neq 0$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = -1 \\ \dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = -1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -1 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(2k+l)\pi}{2} \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(2k-l)\pi}{2} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \ (1) \\ \sin^3 y - \sin y + \cos x = 0 \ (2) \end{cases}$$

(ĐH Ngoại Ngữ Tin Học Tp.HCM 1997)

Giải: Lấy $(1)+(2)$ theo từng vế, ta có :

$$\cos^3 x+\sin^3 y=0\Leftrightarrow \sin y=-\cos x\ \ (3)$$

Thế (3) vào (1), ta được

$$\cos x\,(\cos^2 x-2)=0\Leftrightarrow \cos x=0$$

Với $\cos x=0$ thì $\sin y=0$, khi đó

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ y=l\pi \end{cases}\ (k,l\in\mathbb{Z})$$

Bài 6: Giải hệ phương trình sau :

$$(*)\begin{cases}\sqrt{2}\cos x=1+\cos y\\ \sqrt{2}\sin x=\sin y\end{cases}$$

(ĐH Sư Phạm Vinh 1997)

Giải:

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos^2 x=1+2\cos y+\cos^2 y\ \ (1)\\ 2\sin^2 x=\sin^2 y\ \ (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ theo từng vế, ta có :

$$2(\cos^2 x+\sin^2 x)=\cos^2 y+\sin^2 y+2\cos y+1$$

$$\Leftrightarrow \cos y=0\Leftrightarrow y=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

- Nếu $k=2l, l\in\mathbb{Z}$ thì

$$(*)\Leftrightarrow \cos x=\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+m2\pi\ (m\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+m2\pi\\ y=\dfrac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\ (m,l\in\mathbb{Z})$$

- Nếu $k = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}$ thì

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \ (m \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + (2l + 1)\pi \end{cases} (m, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 7: Giải hệ phương trình sau :

$$(*) \begin{cases} \sin x - 7\cos y = 0 \\ 5\sin y - \cos x = 6 \end{cases}$$

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 49\cos^2 y \ (1) \\ \cos^2 x = 25\sin^2 y - 60\sin y + 36 \ (2) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2)$ theo từng vế, ta có :

$$25\sin^2 y + 49\cos^2 y - 60\sin y + 36 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 y + 5\sin y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = 1 \\ \sin y = -\dfrac{7}{2} \ (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Khi đó,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi + l2\pi \ (l \in \mathbb{Z})$$

Thử lại, ta nhận nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases} x = \pi + l2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (l, k \in \mathbb{Z})$$

Bài 8: Giải hệ phương trình sau :

$$(*)\begin{cases}\tan x+\sin 2y=\sin 2x\\ 2\sin y\cos(x-y)=\sin x\end{cases}$$

Giải: Điều kiện :

$$x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$$

Ta có :

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x+\sin 2y=\sin 2x\\ \sin(2y-x)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\tan(2y-k\pi)+\sin 2y=\sin(4y+k2\pi)\\ x=2y-k\pi\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$$

Suy ra

$$\tan 2y+\sin 2y=\sin 4y$$

$$\Leftrightarrow\sin 2y\left(\frac{1}{\cos 2y}+1-2\cos 2y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2y=0\\ 2\cos^2 2y-\cos 2y-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2y=0\\ \cos 2y=1\\ \cos 2y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2y=0\\ \cos 2y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{m\pi}{2}\\ y=-\frac{\pi}{3}+m\pi\ \ (m\in\mathbb{Z})\\ y=\frac{\pi}{3}+m\pi\end{array}\right.$$

Ứng với $x=2y-k\pi$ và điều kiện bài toán, ta có nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases}x=(m-k)\pi\\ y=\frac{m\pi}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\pm\frac{2\pi}{3}+(2m-k)\pi\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+m\pi\end{cases}\ (m,k\in\mathbb{Z})$$

Bài 9: Giải hệ phương trình sau :

$$(*)\begin{cases}\sin\pi x\cos\pi y=\dfrac{1}{4}\\ 3\tan\pi x=\tan\pi y\\ 0<x+y<2\end{cases}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}+m\\ y\neq\dfrac{1}{2}+n\end{cases}\ (m,n\in\mathbb{Z})$$

Ta có :

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\pi x\cos\pi y=\dfrac{1}{4}\\ 3\sin\pi x\cos\pi y=\sin\pi y\cos\pi x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\pi x\cos\pi y=\dfrac{1}{4}\\ \sin\pi y\cos\pi x=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\pi(x+y)=1\\ \sin\pi(x-y)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\pi(x+y)=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \left[\begin{array}{l}\pi(x-y)=-\dfrac{\pi}{6}+l2\pi\\ \pi(x-y)=\dfrac{7\pi}{6}+l2\pi\end{array}\right.\end{cases}\ (k,l\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} + k + l \\ y = \dfrac{1}{3} + k - l \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5}{6} + k + l \\ y = -\dfrac{1}{3} + k - l \end{cases} \end{array}\right. \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Với $0 < x + y < 2$ thì $k = 0$. Do đó, kết hợp với điều kiện bài toán, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} + l \\ y = \dfrac{1}{3} - l \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{5}{6} + l \\ y = -\dfrac{1}{3} - l \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

Bài 10: Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \dfrac{1}{2} + \sin y - \cos y \\ 2\sin 2x = \dfrac{3}{2} + \sin 2y \end{cases}$$

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ v = \sin y - \cos y = \sqrt{2}\sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \left(u, v \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]\right) (*)$$

Khi đó, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2} + v \\ 2(u^2 - 1) = \dfrac{3}{2} + (1 - v^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2} + v \\ 2\left(\dfrac{1}{4} + v + v^2\right) + v^2 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} + v \\ 3v^2 + 2v - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1 + 2\sqrt{13}}{6} \\ v = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3} \end{cases} \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + 2\sqrt{13}}{6\sqrt{2}} = \sin\alpha \\ \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3\sqrt{2}} = \sin\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = \beta + \frac{\pi}{4} + l2\pi \\ y = \frac{5\pi}{4} - \beta + l2\pi \end{array}\right. \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 11: Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \cos x - \cos 2y = x - 2y \ (1) \\ \tan x = 3\tan y \ \ (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Ở phương trình (1) ta có :

$$\cos x - x = \cos 2y - 2y$$

Do đó, ta sẽ khảo sát hàm số

$$f(t) = \cos t - t, t \in \mathbb{R}$$

$$f'(t) = -\sin t - 1 \leq 0$$

Vậy hàm số nghịch biến. Do đó, $x = 2y$

Thay vào (2) ta được :

$$\tan 2y = 3\tan y$$

$$\Leftrightarrow \tan y\,(1 - 3\tan^2 y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan y = 0 \\ \tan^2 y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = k\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

Từ đó, kết hợp với điều kiện $(*)$, ta nhận được nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases} x = 2k\pi \\ y = k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 12: Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) \ (1) \\ \tan y + \cot y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \ (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ y \neq \dfrac{l\pi}{2} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Ta có :

$$\begin{cases} |\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \geq 2 \\ 2\left|\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leq 2 \end{cases}$$

Nên (1) tương đương với

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\tan x + \cot x = 2\\ \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases} \vee (\mathrm{II})\begin{cases}\tan x + \cot x = -2\\ \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = -1\end{cases}$$

Giải (I) :

$$\begin{cases}\tan x = 1\\ \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{4} + p\pi\\ y = \frac{\pi}{4} + q2\pi\end{cases} \quad (p, q \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm trên thỏa điều kiện của hệ, ta thế vào (2):

$$\mathrm{VT} = \tan y + \cot y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + q2\pi\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4} + q2\pi\right) = 2$$

$$\mathrm{VP} = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin p\pi = 0$$

Do đó, nghiệm trên không là nghiệm của hệ.

Giải (II) :

$$\begin{cases}\tan x = -1\\ \sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -\frac{\pi}{4} + p\pi\\ y = -\frac{3\pi}{4} + q2\pi\end{cases} \quad (p, q \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm trên thỏa điều kiện của hệ, ta thế vào (2):

$$\mathrm{VT} = \tan y + \cot y = \tan\left(-\frac{3\pi}{4} + q2\pi\right) + \cot\left(-\frac{3\pi}{4} + q2\pi\right) = 2$$

$$\mathrm{VP} = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = \begin{cases}-2\text{ ; nếu } p \text{ chẵn}\\ 2\text{ ; nếu } p \text{ lẻ}\end{cases}$$

Do đó, kết hợp với điều kiện $(*)$, ta nhận được nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (2m+1)\pi \\ y = -\dfrac{3\pi}{4} + q2\pi \end{cases} (m, q \in \mathbb{Z})$$

Bài 13: Giải hệ phương trình sau :

$$(*)\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y) \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1)\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2} = 0 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases} \text{ hoặc } (2)\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = \cos\dfrac{x+y}{2} \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

Giải (1) :

$$\begin{cases} x + y = k2\pi \\ |x| + |y| = 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $|k2\pi| = |x+y| \le |x| + |y| = 1$ nên $k = 0$. Suy ra

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

Do đó, nghiệm của hệ là :

$$(x; y) \in \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Giải (2) :

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{x+y}{2} + k2\pi \\ |x| + |y| = 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = -k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \begin{cases} x = k2\pi \\ |x| + |y| = 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Đánh giá tương tự như trên, ta có nghiệm của hệ là :

$$(x; y) \in \{(1; 0), (-1; 0), (0; 1), (0; -1)\}$$

<u>Bài 14:</u> Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 = \cos \pi x_2 \\ 3\sqrt{3}x_2 = \cos \pi x_3 \\ 3\sqrt{3}x_3 = \cos \pi x_4 \\ 3\sqrt{3}x_4 = \cos \pi x_1 \end{cases}$$

<u>Giải:</u> Vì hàm số $\cos t$ có chu kỳ tuần hoàn 2π và ta thấy $0; 2\pi$ đều không là nghiệm của hệ nên ta xét hệ trên $(0; 2\pi)$.

Đặt $t_i = \pi x_i$, $i = \overline{1; 4}$. Khi đó $t_i \in (0; 2\pi)$ và hệ tương đương với

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{\pi} t_1 = \cos t_2 \ (1) \\ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} t_2 = \cos t_3 \ (2) \\ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} t_3 = \cos t_4 \ (3) \\ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} t_4 = \cos t_1 \ (4) \end{cases}$$

Cộng theo vế các phương trình của hệ, ta được

$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \sum_{i=1}^{4} t_i = \sum_{i=1}^{4} \cos t_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \left(\cos t_i - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} t_i \right) = 0$$

Nếu $t_1 < \frac{\pi}{6}$ thì ở phương trình (1) ta được $\cos t_2 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì t_1 và $\cos t_2$ cùng dấu; $t_1 \in (0; 2\pi)$ nên $t_2 < \frac{\pi}{6}$

Tương tự vậy, ta được $t_i < \frac{\pi}{6}$ $(*)$

Mặt khác, ta xét hàm số :

$$f(u) = \cos u - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}u, u \in \mathbb{R}$$

$$f'(u) = -\sin u - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} < 0$$

Do đó, hàm số nghịch biến. Kết hợp với $(*)$, suy ra :

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\cos t_i - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}t_i\right) > 0\ (!)$$

Tương tự với trường hợp $t_1 > \frac{\pi}{6}$, ta được

$$\begin{cases} t_i > \frac{\pi}{6} \\ \sum_{i=1}^{4}\left(\cos t_i - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}t_i\right) < 0\ (!) \end{cases}$$

Do $t_i = \frac{\pi}{6}$ thỏa mãn hệ phương trình, nên ta nhận $t_i = \frac{\pi}{6}$ làm nghiệm

Khi đó,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{6}$$

Bài 15: Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sin x \cos y \sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0\ (1) \\ x = y + z\ (2) \end{cases}$$

Giải: Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]\sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y)\right]^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y)\right]^2+\frac{1}{4}\cos^2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x+y)=-\frac{1}{2}\sin(x-y)\\ \cos(x-y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x+y)=-\frac{1}{2}\\ \sin(x-y)=1\end{cases} \vee \begin{cases}\sin(x+y)=\frac{1}{2}\\ \sin(x-y)=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-y=\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\\ x-y=\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-y=-\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x-y=-\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\end{array}\right. \quad (k,l\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\ y=-\frac{\pi}{3}+(k-l)\pi\\ z=\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+(k+l)\pi\\ y=\frac{\pi}{3}+(k-l)\pi\\ z=\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\ y=\frac{\pi}{3}+(k-l)\pi\\ z=-\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\ y=\frac{2\pi}{3}+(k-l)\pi\\ z=-\frac{\pi}{2}+l2\pi\end{cases}\end{array}\right. \quad (k,l\in\mathbb{Z})$$

<u>Bài 16:</u> Giải hệ phương trình sau :

$$(*)\begin{cases}\sin^2 x-2\sin x\cos 2y=\cos\frac{x+y}{2}+\cos\frac{x-y}{2}-2\\ \cos x+\cos y-2\sin^2 2y=0\end{cases}$$

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x \cos 2y = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - 2 \ (1) \\ 2\cos^2 2y + \cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 2 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2)$ theo từng vế, ta được

$$(\sin x - \cos 2y)^2 + \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{y}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos 2y \ \ (3) \\ \cos\frac{x}{2} = \cos\frac{y}{2} \ (4) \end{cases}$$

Giải (4) :

$$\left[\begin{array}{l} x = y + k4\pi \\ x = -y + k4\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Với $x = y + k4\pi$, ta thay vào (3) :

$$\sin(y + k4\pi) = \cos 2y$$

$$\Leftrightarrow \cos 2y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = \frac{\pi}{2} - y + l2\pi \\ 2y = y - \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{array}\right. (l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \\ y = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{array}\right. (l \in \mathbb{Z})$$

Do đó, ta có :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} + k4\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} \vee (\mathrm{II}) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + (l + 2k)2\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Lần lượt thay (I), (II) vào $(*)$ ta nhận (II) là nghiệm của hệ.

Với $x = -y + k4\pi$ thay vào (3), ta được :

$$\cos 2y = \sin(-y + k4\pi)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{l2\pi}{3} \end{array}\right. (l \in \mathbb{Z})$$

Do đó, ta có :

$$\text{(III)}\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + (2k - l)2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \vee \text{(IV)}\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{l2\pi}{3} + k4\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{l2\pi}{3} \end{cases}$$

Lần lượt thay (III), (IV) vào $(*)$ ta nhận (III) là nghiệm của hệ.

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

6.1.1. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} \tan x + \tan y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \cot x + \cot y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

6.1.2. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} \tan x - \tan y - \tan x \tan y = 1 \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \cos y = 2 \\ \sin x \cos y = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sin x - \sin 2y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos 2y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos x = \sqrt{2} \cos y \\ x \in [0; \pi] \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

6.1.3. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} \cot x - \cot y = x - y \\ 5x + 8y = 2\pi \\ 0 < x, y < \pi \end{cases}$

b. $\begin{cases} \cos(x + y) = 2\cos(x - y) \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \tan x + \cot x = 2 \sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ \tan y + \cot y = 2 \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

d. $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} \\ 10\sqrt{x^6+1} = 3(y^4+2) \\ x, y \in \left(\pi; \dfrac{5\pi}{4}\right) \end{cases}$

6.1.4. Cho $\begin{cases} \sin a \sin b \sin c \neq 0 \\ \cos a, \cos b, \cos c \text{ khác nhau từng đôi một} \end{cases}$

Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x\sin a + y\sin 2a + z\sin 3a = \sin 4a \\ x\sin b + y\sin 2b + z\sin 3b = \sin 4b \\ x\sin c + y\sin 2c + z\sin 3c = \sin 4c \end{cases}$$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

6.1.1. Nghiệm của hệ phương trình là:

a. $\begin{cases} x = k\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} - m\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$

b. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = -k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

c. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

d. $\begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{24} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{24} + k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + k\pi \\ y = -\dfrac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

6.1.2. Nghiệm của hệ phương trình là:

a. $\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + n\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$

b. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ y = \pi + n2\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$

c. $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \\ y = n\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = m2\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + n\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$

d. Vô nghiệm

6.1.3. Nghiệm của hệ phương trình là:

a. $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{13} \\ y = \dfrac{2\pi}{13} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + (m-n)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + (m-n)\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$

c. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{4} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$

d. $x = y = \sqrt{5 + \sqrt{33}}$

6.1.4. Nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x = -8\cos a \cos b \cos c + 2(\cos a + \cos b + \cos c) \\ y = -4(\cos a \cos b + \cos b \cos c + \cos c \cos a) - 2 \\ z = 2(\cos a + \cos b + \cos c) \end{cases}$$

CHƯƠNG 7

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG GẶP

- Để giải một bất phương trình lượng giác, ta thường dùng hai phương pháp sau :

1. **Phương pháp 1 :** Đưa bất phương trình về các dạng cơ bản như : $\cos x \geq a; \sin x \leq a; \tan x \geq a; \cot x \leq a$ ... Thông thường ta dùng đường tròn lượng giác để tìm các họ nghiệm tương ứng.
2. **Phương pháp 2 :** Viết bất phương trình về tích hoặc thương các hàm số lượng giác dạng cơ bản. Xét dấu các thừa số từ đó chọn nghiệm thích hợp.

CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH CẦN NẮM

- $\cos x \geq a$
  - Nếu $a > 1$, bất phương trình vô nghiệm.
  - Nếu $a = 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $-1 < a < 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$-\arccos a + k2\pi \leq x \leq \arccos a + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $a \leq -1$, bất phương trình có vô số nghiệm.
- $\sin x \geq a$
  - Nếu $a > 1$, bất phương trình vô nghiệm.
  - Nếu $a = 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $-1 < a < 1$, bất phương trình có nghiệm là :

$$-\arcsin a + k2\pi \leq x \leq \arcsin a + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - Nếu $a \leq -1$, bất phương trình có vô số nghiệm.

- $\tan x \geq a$ có nghiệm là :

$$\arctan a + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- $\cot x \geq a$ có nghiệm là :

$$k\pi < a \leq \operatorname{arccot} a + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

II. CÁC BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: Giải bất phương trình sau :

$$\frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1} > 0$$

Giải: Bất phương trình tương đương với

$$(\sin x - \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - (1 - \cos x)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - (1 - 2\cos x + \cos^2 x) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \cos x < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2: Giải bất phương trình sau :

$$5 + 2\cos 2x \leq 3|2\sin x - 1|$$

Giải: Ta đặt : $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$

Bất phương trình tương đương với

$$5 + 2(1 - 2t^2) \leq 3|2t - 1|$$

$$\Leftrightarrow 7 - 4t^2 \leq 3|2t - 1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-4t^2 \le 6t-3 \\ t \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 7-4t^2 \le 3-6t \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \ge 1 \\ t \le -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ t \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \ge 2 \\ t \le -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t \le -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x \le -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \le x \le \dfrac{11\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3: Giải bất phương trình sau :

$$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \\ \cos 2x \ne 0 \\ \cos 4x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 8x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{l\pi}{8} \ (l \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$2\cot 2x - 2\tan 2x - 4\tan 4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cot 2x - \tan 2x) - 4\tan 4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4(\cot 4x - \tan 4x) < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 8x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < 8x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{8} \ (k \in \mathbb{Z}) \left(\text{thỏa } (*)\right)$$

Bài 4: Giải bất phương trình sau :

$$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

Giải: Điều kiện :

$$\sin 16x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{l\pi}{16} \ (l \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} - 2\tan 2x - 4\tan 4x - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\tan 2x} - \tan 2x\right) - 4\tan 4x - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\tan 4x} - \tan 4x\right) - 8\tan 8x \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{\tan 8x} - \tan 8x\right) \geq 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 16x \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow k\pi < x \le \frac{\pi}{96} + \frac{k\pi}{6}\ (k \in \mathbb{Z})\ \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

Bài 5: Giải bất phương trình sau :

$$\frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} \le 1$$

Giải: Điều kiện :

$$\left[\begin{array}{l} x \ne \frac{7\pi}{12} + l\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{12} + l\pi \end{array}\right.\ (l \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{3(\sin x - \cos x) - 4(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{1 + 2\sin 2x} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x - \cos x)\left[3 - 4\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]}{1 + 2\sin 2x} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x \le 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow k2\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$ ta có nghiệm của bất phương trình là

$$\begin{cases} k2\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ x \ne \frac{7\pi}{12} + l\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{12} + l\pi \end{cases}\ (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 6: Giải bất phương trình sau :

$$2\cot x - \tan x \le \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cot 2x$$

Giải: Điều kiện :

$$\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{l\pi}{2}\ (l \in \mathbb{Z})\ (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$\cot x + (\cot x - \tan x) \le \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cot 2x$$

$$\Leftrightarrow \cot x + 2\cot 2x \le \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cot 2x$$

$$\Leftrightarrow \cot x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \le x < \pi + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với $(*)$ ta có nghiệm của bất phương trình là

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \le x < \pi + k\pi\ (k \ne 4l + 1; l \in \mathbb{Z})$$

Bài 7: Tìm nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{3}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \ge \sqrt{3}\ (1)$$

Thỏa mãn bất phương trình $\log(x^2 + x + 4) < 1\ (2)$

Giải: Bất phương trình (1) tương đương với

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bất phương trình (2) tương đương với

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

<u>Bài 8:</u> Giải bất phương trình sau :

$$2\cos 2x + \sin 2x \leq \tan x$$

<u>Giải:</u> Điều kiện :

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}) \ (*)$$

Đặt $= \tan x\,, t \in \mathbb{R}$. Khi đó, bất phương trình tương đương với

$$2.\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \leq t$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - t - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t \geq 1 \\ -2 \leq t \leq -1 \end{array}\right.$$

Với $-2 \leq t \leq -1$ thì

$$-\alpha + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}; \tan\alpha = 2)$$

Với $t \geq 1$ thì

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện $(*)$, ta nhận 2 nghiệm trên là nghiệm của bất phương trình.

Bài 9: Giải bất phương trình sau :

$$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$$

(ĐH Kinh Tế Tp.HCM 1997)

Giải: Bất phương trình tương đương với

$$(\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2] > 0$$

Đặt $f(x) = (\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2]$

Do hàm số tuần hoàn có chu kỳ 2π nên ta chỉ cần xét dấu của $f(x)$ trên $[0; 2\pi]$.

Ta có :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x + \cos x = 0\ (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2 = 0\ (2) \end{array}\right.$$

Với (1) :

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

Với (2), ta đặt $t = \cos x - \sin x$, $|t| \le \sqrt{2}$:

$$2t + \frac{1 - t^2}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t = 1 \\ t = 3\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên $[0; 2\pi]$ ta thấy

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0

Như vậy, ta có trong 1 chu kỳ nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\end{array}\right.$$

Do đó, nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{7\pi}{4} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 10: Giải bất phương trình sau :

$$\sin 2x + \sin 4x > \sin x + \sin 3x +$$

Giải: Đặt $f(x) = -\sin x - \sin 3x + \sin 2x + \sin 4x$

Do hàm số tuần hoàn có chu kỳ 2π nên ta chỉ cần xét dấu của $f(x)$ trên $[0; 2\pi]$.

Ta có, bất phương trình tương đương với

$$2\sin 3x\cos x - 2\sin 2x\cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\cos\frac{5x}{2} > 0 \\ 0 < x < 2\pi\end{cases}$$

Lập bảng xét dấu trên $[0; 2\pi]$ ta thấy

x	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{5}$		π		$\frac{7\pi}{5}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{5}$		2π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos\frac{5x}{2}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\cos x\cos\frac{5x}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} k2\pi < x < \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \pi + k2\pi < x < \frac{7\pi}{5} + k2\pi \\ \frac{3\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{9\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 11: Giải bất phương trình sau :

$$3\sqrt{\tan x + 1}.\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 3\cos x} \leq 2^{1-\sqrt{\tan x}}$$

Giải: Điều kiện :

$$\begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$3\sqrt{\tan x + 1}.\frac{\tan x + 2}{\tan x + 3} \leq 2^{1-\sqrt{\tan x}}$$

Đặt $t = \tan x\,, t \geq 0$, ta đưa bất phương trình trở thành

$$3\sqrt{t + 1}.\frac{t + 2}{t + 3} \leq 2^{1-\sqrt{t}}$$

Ta xét hàm số

$$f(t) = 3\sqrt{t + 1}.\frac{t + 2}{t + 3}\,, t \geq 0$$

$$f'(t) = 3\left[\frac{1}{2\sqrt{t+1}}.\frac{t+2}{t+3} + \sqrt{t+1}.\frac{1}{(t+3)^2}\right] > 0$$

Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $[0, \infty)$

Ta xét thêm hàm số

$$g(t) = 2^{1-\sqrt{t}}, t \geq 0$$

$$g'(t) = -2^{1-\sqrt{t}}.\frac{1}{2\sqrt{t}} < 0$$

Do đó, $g(t)$ nghịch biến trên $[0, \infty)$

Suy ra với mọi $t \in [0, \infty)$

$$\begin{cases} f(t) \geq f(0) = 2 \\ g(t) \leq g(0) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 2 \geq g(t), \forall t \in [0, \infty)$$

Như vậy, ta có :

$$f(t) = g(t) = 2 \Leftrightarrow t = 0$$

Khi đó,

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

<u>Bài 12:</u> Giải bất phương trình sau :

$$7\sqrt{\tan x}\,(\sin^2 x + 3\cos^2 x) \leq 6\sqrt[4]{3}(\sin^2 x + 4\cos^2 x)$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

<u>Giải:</u> Điều kiện :

$$\begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Bất phương trình tương đương với

$$7\sqrt{\tan x}\,.\frac{\tan^2 x + 3}{\tan^2 x + 4} \leq 6\sqrt[4]{3}$$

Đặt $t = \tan x\,, t \geq 0$. Ta đưa bất phương trình trở thành

$$7\sqrt{t}.\frac{t^2+3}{t^2+4} \leq 6\sqrt[4]{3}$$

Ta xét hàm số

$$f(t) = 7\sqrt{t}.\frac{t^2+3}{t^2+4}, t \geq 0$$

$$f'(t) = 7\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}.\frac{t^2+3}{t^2+4} + \sqrt{t}.\frac{2t}{(t^2+4)^2}\right] > 0$$

Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $[0, \infty)$.

Suy ra :

$$f(t) \leq 6\sqrt[4]{3} \Leftrightarrow t \leq \sqrt{3}$$

Như vậy,

$$0 \leq \tan x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ \big(\text{thỏa } (*)\big)$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

7.1.1. Giải các bất phương trình sau :

a. $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x < 1$

b. $\sin(\cos x) \leq \frac{1}{2}$

c. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} > 0$

7.1.2. Giải các bất phương trình sau :

a. $\sin 3x + \sin x < \sin 2x$

b. $\sin^3 x \sin 3x - \cos^3 x \cos 3x \leq \frac{1}{2}$

c. $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geq \frac{5}{2}$

7.1.3. Giải các bất phương trình sau :

a. $\sqrt{3}\cot x - \tan x > \sqrt{3} - 1$

b. $2\tan x + \cot x \geq \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$

c. $\dfrac{2\cos x - 1}{\cos 2x + \cos x} \geq 2$

7.1.4. Giải các bất phương trình sau :

a. $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$

b. $\cos x + \cos 2x \geq \cos 3x + 1$

c. $\dfrac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} \leq \sqrt{3}\tan\dfrac{x}{2}$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

7.1.1. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b. $\alpha + k2\pi \leq x \leq 2\pi - \alpha + k2\pi, \alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right), \cos\alpha = \dfrac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

c. $\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

7.1.2. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} \pi + k2\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. Vô số nghiệm

c. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + k2\pi < x \leq \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi < x \leq \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

7.1.3. Nghiệm của bất phương trình là :

a. $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2}+k\pi < x < -\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ k\pi < x < \dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. $\dfrac{\pi}{3}+k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2}+k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c. $\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

7.1.4. Nghiệm của bất phương trình là :

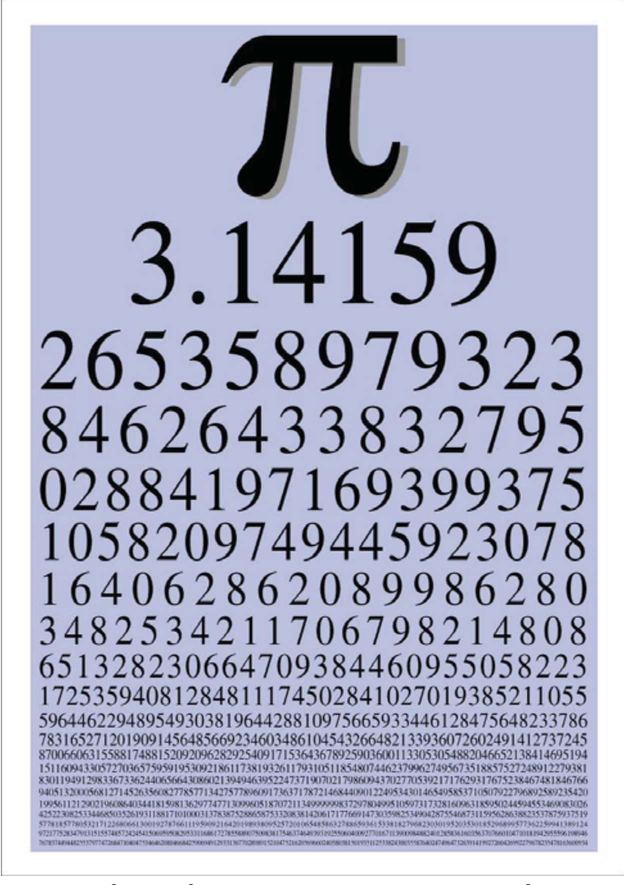
a. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4}+k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ \dfrac{5\pi}{4}+k2\pi < x < 2\pi+k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b. $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ -\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

c. $\begin{cases} k2\pi < x \leq \dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x \neq \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

<u>Đọc Thêm</u>

TẢN MẠN VỀ SỐ PI



Số π là một trong những hằng số độc đáo và đặc biệt nhất của Toán học, và luôn hấp dẫn các nhà khoa học nói chung và nhà Toán học nói riêng bởi ở hầu hết các lĩnh vực đều thấy sự xuất hiện của số π. Cụ thể như số π đóng vai trò là tỉ lệ của đường kính và chu vi đường tròn, hay là một số siêu việt, tức là số không là nghiệm của bất kì phương trình đại số với hệ số nguyên nào…

Đã hàng nghìn năm nay, con người luôn cố gắng tính toán nhiều hơn nữa các chữ số sau dấu phẩy thập phân của số π. Chẳng hạn như Archimedes đã tính giá trị π bằng đánh giá xuất phát từ cách tăng số cạnh của đa giác nội tiếp vòng tròn

$$3\frac{1}{7} < x < 3\frac{10}{71}$$

Cách xấp xỉ trên của Archimedes có độ chính xác đến 3 chữ số sau dấu phẩy. Còn Ptomely vào năm 150 sau Công Nguyên đã tính π xấp xỉ bằng $3{,}1416$. Và cuộc đua này

kết thúc bởi kết quả của Ludolf van Ceulen (1540-1610), người đã tốn 10 năm, tính cạnh của 2^{62}- giác đều để tìm được số π với độ chính xác 35 chữ số sau dấu phẩy.

Về mặt lý thuyết, phương pháp xấp xỉ của Archimedes có thể kéo dài vô hạn, nhưng với phát minh về phép tính vi phân, phương pháp của người Hy Lạp không được dùng đến nữa. Thay vào đó, các chuỗi tích và liên phân số vô hạn hội tụ đã được sử dụng để xấp xỉ số π.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \cdots}}}}}}$$

Từ cuối thế kỷ 17, các dãy vô hạn và chuỗi trở thành những đối tượng chủ yếu trong nghiên cứu của các nhà Toán học. Một trong những kết quả đầu tiên theo hướng này là chuỗi Leibnitz được Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) tìm ra vào năm 1673.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Chuỗi Leibnitz là một trường hợp riêng của một chuỗi tổng quát hơn, được tìm ra bởi James Gregory (1638-1675) vào năm 1670.

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots (|x| \leq 1)$$

Nếu như trong chuỗi Gregory, ngoài việc thay $x = 1$ để được chuỗi Leibnitz thì ta có thể thay x với các giá trị khác nhỏ hơn, để được một chuỗi khác có tốc độ hội tụ cao hơn rất nhiều. Abraham Sharp (1651-1742) đã sử dụng kết quả trên để đạt được kết quả kỷ lục vào năm 1699 với 71 chữ số sau dấu phẩy.

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \cdots\right)$$

Tiếp theo đó, các nhà Toán học đã thông qua việc tìm nhưng tổ hợp các $\arctan(x)$ mà mỗi trong chúng được biểu diễn bởi các chuỗi hội tụ nhanh hơn chuỗi Leibnitz.

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99}$$

$$\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

Chúng ta có thể kiểm tra dễ dàng các đẳng thức này bằng cách sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác :

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}\ (xy < 1)$$

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}\ (xy > -1)$$

$$2\arctan x = \arctan\frac{2x}{1-x^2}\ (|x| < 1)$$

Việc khai triển này cho ta được một chuỗi thuận tiện hơn rất nhiều cho việc tính toán. Và giúp John Machin (1680-1751) tính được 100 chữ số sau dấu phẩy vào năm 1706. Thành công của John Machin đã khởi lên cho các nhà Toán học khác tiếp tục tham gia cuộc chạy đua mà nó đã bắt đầu từ thời Archimedes.

Sử dụng phương pháp của Abraham Sharp, De Lagny (1660-1734) đã tính được 127 chữ số sau dấu phẩy vào năm 1719. Không lâu sau đó, Leonard Euler (1707-1783) bằng một phương pháp khác kiểm tra kết quả của De Lagny và tìm ra sai sót ở chữ số thứ 113. Năm 1841, William Reserford (không rõ năm sinh, năm mất) đã tìm ra 208 chữ số sau dấu phẩy và được kiểm tra lại bởi Johan Martin Zacharias Dase (1824-1861) sai ở chữ số 153. Năm 1847, Thomas Clausen (1801-1885) tiến thêm đến 250 chữ số sau dấu phẩy, trong đó có 248 chữ số tính đúng.

Năm 1853, William Reserford tăng thành tích của mình lên 440 chữ số sau dấu phẩy. Và kỷ lục của thời kỳ này được thiết lập bởi William Shanks (1812-1882) với 530 chữ số (trong đó 527 chữ số tính đúng). Về sau, William Shanks đã phải làm việc cật lực để tính tiếp các chữ số tiếp theo, đưa kỷ lục lên đến 707 chữ số tính đúng.

Đến thế kỷ 20, cuộc cách mạng máy tính đánh dấu những thành tựu vĩ đại của trí tuệ con người. Những kiểm tra đầu tiên trên máy tính điện tử vào năm 1945 đã phát hiện William Shanks đã sai ngay từ chữ số thứ 528. Điều này khiến nhà Toán học Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003) phải thốt lên rằng : "Không thể không buồn khi nghĩ rằng, những tính toán mà Shanks tội nghiệp đã phải bỏ ra một phần lớn của cuộc đời để tính, thì máy tính điện tử hiện đại có thể thực hiện trong vài giây như là để khởi động vậy". Và như vậy, sự xuất hiện của máy tính điện tử làm cho tốc độ cuộc đua tìm những chữ số sau dấu phẩy càng tăng nhanh.

Năm 1949, John Von Neumann (1903-1957) cùng các cộng sự đã tính được 2037 chữ số sau dấu phẩy trên một trong những máy tính điện tử đầu tiên ENIAC. Ngưỡng 10000 chữ số đạt được vào năm 1958 bởi Fredrick Jenuine (1908-1973) với sự trợ giúp của máy tính IBM 704. Và 100.000 chữ số sau dấu phẩy của số π được tính vào năm 1961 bởi Daniel Shanks (1917-1996) cùng với máy tính IBM 7079. Năm 1973, Jan Gyiu và M. Buet (không rõ năm sinh, năm mất) đã lập kỷ lục với mức 1 triệu chữ số sau dấu phẩy, sử dụng gần một ngày làm việc của máy CDC-7600.

Đến cuối thế kỷ 20, người ta đã tính được số π với độ chính xác đến chữ số thứ 200 tỉ. Và cho tới hiện tại, mới đây nhất là kỷ lục của Fabrice Bellard (1972) khi tính chính xác đến chữ số thứ 2.7 tỉ tỉ của số π. Mất đến 131 ngày để tính toán, nhưng đây là một kết quả cực kỳ ấn tượng vì Fabrice Bellard chỉ sử dụng máy tính để bàn thông thường để xử lý số liệu cùng với việc phát triển một phần mềm xử lý thuật toán mạnh hơn 20 lần so với những sản phẩm tương tự trước đó.

Tưởng như là kỷ nguyên của máy tính điện tử đã loại bỏ con người ra khỏi cuộc chơi một cách dứt khoát, máy tính nào có tốc độ xử lý nhanh hơn thì máy đó thắng. Nhưng sự thực thì không như vậy, chính con người đã khởi xướng cuộc chạy đua không tiền khoán hậu này và tạo nên nhiều thuật toán nhân nhanh giúp máy tính điện tử xử lý hiệu quả hơn.

Trở lại con số 200 tỉ đã được thiết lập vào cuối thế kỷ 20…

Năm 1987, Jonathan và Peter Borwein (1953) đã tìm ra một chuỗi đáng ngạc nhiên :

$$\frac{\pi}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)! \left[5280\left(236674 + 30303\sqrt{61}\right)\right]^{3n+\frac{3}{2}}} \left[212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 + n\left(13773990892672\sqrt{61} + 107578229802750\right)\right]$$

Dãy các số hạng dưới dấu tính tổng với $n = 0,1,2,3$ ... bổ sung thêm khoảng 25 chữ số sau dấu phẩy cho số π ứng với mỗi số hạng. Chỉ riêng số hạng đầu tiên $(n = 0)$ cho giá trị gần đúng đến 24 chữ số sau dấu phẩy.

Thậm chí, Jonathan và Peter Borwein còn đưa ra thuật toán giúp tính toán các chữ số sau dấu phẩy của số π, có hiệu quả thần kỳ. Mỗi một bước tính của thuật toán này làm tăng thêm độ dài các chữ số sau dấu phẩy được tính đúng lên 4 lần. Dưới đây là mô tả của thuật toán này :

Ta đặt $y_0 = \sqrt{2} - 1$ và $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$, các số hạng tiếp theo y_{n+1} được tính theo số hạng trước đó bởi công thức

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 + y_n^4}}$$

Dãy số $\{a_n\}$ được xây dựng bởi công thức

$$a_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2)$$

Khi n càng tăng thì ta có đánh giá

$$0 < a_n - \frac{1}{\pi} < 2^{2n+3}.e^{-2^{2n+1}\pi}$$

Nói cách khác,

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

Cơ sở của phát minh ra thuật toán này là những nghiên cứu trong lĩnh vực *tích phân elliptic* và *hàm theta*. Thuật toán kỳ diệu này lấy ý tưởng của nhà Toán học thiên tài người Ấn Độ Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Và con số 200 tỉ đã xuất hiện từ đó…

Có thể nói thêm rằng, một trong những phương pháp gây tò mò nhất để tính số π là của Count Buffon vào thế kỷ 18 cùng với *Bài toán chiếc kim* của ông. Trên một mặt phẳng, ta kẻ các đường thẳng song song cách đều nhau d đơn vị chiều dài. Thả chiếc kim có độ dài nhỏ hơn d lên mặt phẳng đó. Nếu chiếc kim rơi lên trên đường kẻ thì lần thả đó được coi là thành công. Khám phá đầy bất ngờ của Buffon là tỉ lệ số lần thả thành công so với không thành công là một biểu thức chứa số π.

Nếu chiều dài kim bằng d đơn vị thì xác suất thả thành công là

$$0.6369418 \approx \frac{2}{\pi}$$

Số lần thả càng nhiều thì xấp xỉ cho số π càng chính xác. Trong một phương pháp xác suất khác để tính số π là vào năm 1904, R. Chartes đã tìm ra xác suất để hai số nguyên được viết ngẫu nhiên nguyên tố cùng nhau và xác suất để một số nguyên được chọn ngẫu nhiên mà nó không chia hết cho số chính phương đều mang chung giá trị tuyệt vời là

$$\frac{6}{\pi^2}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Nho, Nguyễn Văn Thổ, Chuyên đề Lượng giác, NXB Tổng hợp Tp.HCM, 2007.

[2] Võ Giang Giai, Tuyển tập 400 bài toán lượng giác, NXB Đại học Sư Phạm, 2007.

[3] Phạm Tấn Phước, Các chuyên đề Lượng giác, NXB Tp.HCM, 1999.

[4] Huỳnh Công Thái, Đào Khải, Phương pháp giải toán Lượng giác THPT, NXB Đại học Sư Phạm, 2004.

[5] Trần Văn Toàn, Võ Hữu Phước, Luyện Thi Cấp Tốc Toán Học, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2009.

[6] Doãn Minh Cường, Giới thiệu Đề Thi Tuyển Sinh Vào Đại Học môn Toán (từ 1997-1998 đến 2004-2005), NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.

[7] Huỳnh Công Thái, Các dạng toán điển hình : Phương Trình, Hệ Phương Trình Lượng Giác, NXB ĐHQG Hà Nội, 2006.

[8] Theoni Pappas, Niềm vui Toán Học, NXB Kim Đồng, 2009.

[9] Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XII – 2006, Toán học, NXBGD, 2006.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XIII – 2007, Toán học, NXBGD, 2007.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XIV – 2008, Toán học, NXBGD, 2008.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XV – 2009, Toán học, NXBGD, 2009.